Indications

Esp Vect en Dim Finie

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?

1) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$ et h :$x \mapsto 1$

1) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Supposons que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$
M que $\alpha = \beta = \gamma = 0$
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$
$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma = 0)$
Pour $x = 0$ et $x = \pi$, on obtient $\begin{cases} \dots = 0 \\ \dots = 0 \end{cases}$

2) (f,g,h,i) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$, h :$x \mapsto xsin(x)$ et i :$x \mapsto xcos(x)$

2) Soient $\alpha, \beta, \lambda, \delta \in \mathbb{R}$.
Supp que $\alpha f + \beta g + \lambda h + \delta i = 0$
M que $\alpha = \beta = \lambda = \delta = 0$
On a : $(\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \lambda x \sin(x) + \delta x \cos x = 0)$
$x = 0 \Rightarrow$
$x = \pi \Rightarrow$
(2) devient : $(\forall x \in \mathbb{R}, \dots)$

3) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin^2(x)$, g :$x \mapsto cos^2(x)$ et h :$x \mapsto 1$

3) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1)$
$\Rightarrow \dots f \dots g \dots h = \dots$

4) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$ et h :$x \mapsto e^x$

4) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$

Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma e^x = 0)$

Plusieurs méthodes sont possibles :

→ via les développements limités de $\sin(x)$, $\cos x$ et e^x.
Obtenir un système d'inconnues α, β, γ ...

→ En donnant à x trois valeurs, obtenir un système d'inconnues α, β, γ ...

→ Utiliser le fait que cos et sin sont deux fonctions bornées, alors que $x \mapsto e^x$ non

Appliquons cette dernière piste.

On a $(\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = -\gamma e^x)$

or sin et cos sont bornées alors $(\alpha \sin + \beta \cos)$ aussi

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto -\gamma e^x$ est bornée

Exercice 2

Considérons la famille $B = (Q_1, Q_2, Q_3)$ où $\begin{cases} Q_1 &= X^2 + 1 \\ Q_2 &= 3X^2 - X + 3 \\ Q_3 &= X^2 - X + 1 \end{cases}$

B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Sioui, déterminer les coordonnées de X.

1) B est une base ; en effet

Card(B) = 3 = dim($\mathbb{R}_2[X]$), alors il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Supposons que $\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0$

Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

On a $\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0 \iff \alpha(\dots) + \beta(\dots) + \gamma(\dots) = 0$

$\iff \begin{cases} \dots = 0 \\ \dots = 0 \\ \dots = 0 \end{cases}$

2) Notons (x, y, z) les coordonnées de X dans la base B.

On a par définition : $X = x Q_1 + y Q_2 + z Q_3$

$\Rightarrow X = x(\dots) + y(\dots) + z(\dots)$

$\Rightarrow \begin{cases} \dots = \dots \\ \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{cases}$

Exercice 3 :

1) $E = F([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \mapsto sin^k(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, ..., f_n)$ est libre.

1) Soit $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.

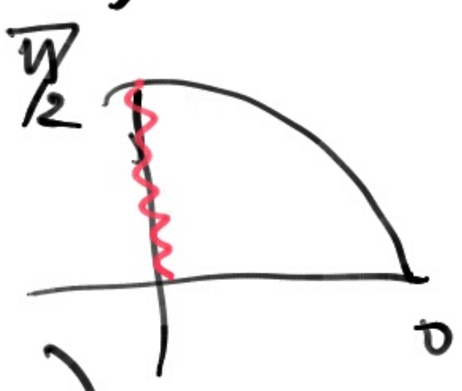
Supposons que $\alpha_0 f_0 + ... + \alpha_n f_n = 0$

Mque $\alpha_0 = ... = \alpha_n = 0$

$$\left(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k(x) = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\sin(x))^k = 0 \right)$$

$x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin(x) \in [?, ?]$



D'où $\left(\forall t \in ...., \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (...)^k = 0 \right)$

2) $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, ..., g_n)$ est libre.

Soit $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha_0 g_0 + \cdots + \alpha_n g_n = 0$

Mque $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k g_k(x) = 0\right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{kx} = 0\right)$$

On continuera d'une manière similaire à 1°)

Exercice 4

($\Rightarrow$)

1) $f^2 = 0$?

Soit $x \in E$. Montrer que $f(f(x)) = 0$.

On a $f(x) \in \ldots$

2) $n = 2rg(f)$?

D'après le théorème du rang on a : ...

($\Leftarrow$) $ker(f) = Im(f)$?

On a $f^2 = 0$ donc ... C ...

et d'après le théorème du rang on a :

- - - - - - - - - - - - - "

et vu que $n = 2rg(f)$

Alors ....

Exercice 5 et Exercice 6

Raisonner par l'absurde, et appliquer la formule de Grassmann

Exercice 8

1) On a f^2 .....

D'où .....

2) Il suffit de montrer que la $f^{ille}(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre Car ....

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que :

- - - - - - - - - - -

M que .....

3) $rg(f) = \dim(Im(f))$.

Or $\begin{cases} (x_0, f(x_0), f^2(x_0)) \text{ base de } E \\ f \in \mathcal{L}(E) \end{cases}$

D'où ..... est une famille génératrice de $Im(f)$

$\Rightarrow rg(f) = ...$

4) $g \in C_f \overset{déf}{\Longleftrightarrow} gf = fg$

i) Il suffit de m que C_f est un sev de ...

(a) - - - - - ?

(b) Soient - - - - - - - - - - - - - - - -

Soit λ . - - - -

M que . . . - - - - - .

ii) (I_E, f, f^2) base de C_f ?

a) Libre ?

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.

Supposons que .....

Montrons que .....

b) Génératrice ?

Soit $g \in C_f$.

Montrons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que :

$$g = aI_E + bf + cf^2$$

On a $g(x_0) \in E$ et $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ base de E

D'où l'existence de .....

Exercice 9

1) On a l'hypothèse d'indication

$\Rightarrow f^{\cdots} = 0$ et $f^{\cdots} \neq 0$

2) Card(. . . .) = n = dim(. .)

Donc il suffit de montrer que (. . . . .) est libre.

Soit alors $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\cdots} \in \mathbb{K}$ tels que :

$(\alpha_0 \ldots + \alpha_1 \ldots + \ldots + \alpha_{\cdots} \ldots = 0)$ (2)

Mque $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{\cdots} = 0$.

Composons par $f^{\cdots}$ dans (2).

Puisque $f^n = 0$, on obtient $\boxed{\ldots = 0}$

et puisque $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, alors $\boxed{\alpha_{\cdots} = 0}$.

etc.

3) $B = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ base de E

Donc $f(B) = (\ , \ , \ldots)$ (le générateur de Im(f))

$\Rightarrow Im(f) = Vect(\ , \ldots , \ )$

$\Rightarrow rg(f) = \dim(Vect(\ldots))$

$= rg(\ldots)$

$= \ldots$

Exercice 10

1) $\deg(L_k) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \deg(\dots) = \dots$

2) $\begin{cases} L_k(a_i) = 1 & \text{si } k = i \\ L_k(a_i) = 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$

3) Il suffit de montrer que $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre, car

- - - - - -

Soit alors $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \dots = 0$

Montrons que - - - - - - -

4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Notons $a_0, \dots, a_n$ les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

Déterminons $a_0, \dots, a_n$:

On a $P = \dots$

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n
et $f \in \mathcal{L}(E)$; $rg(f) = rg(f^2)$

On veut montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

Il s'agit de montrer que

$$\begin{cases} 1) \ \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \\ 2) \ \dim(\ldots) = \ldots + \ldots \end{cases}$$

car E est de dimension finie.

Exercice 12

$\dim(E) = n$
$f \in \mathcal{L}(E)$

1) i) $\Rightarrow$ ii) ?

On veut montrer que $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$
$\left(\ker(f) + \mathrm{Im}(f)\right)$ est un sev de E, alors il suffit de montrer que ....

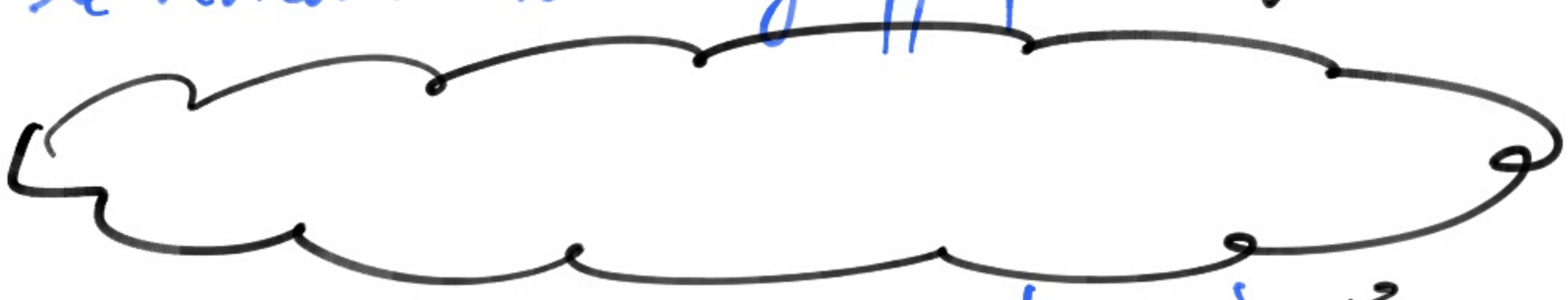
ii) $\Rightarrow$ iii) ?

On a $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$
Et on veut montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
Il reste à montrer que ....

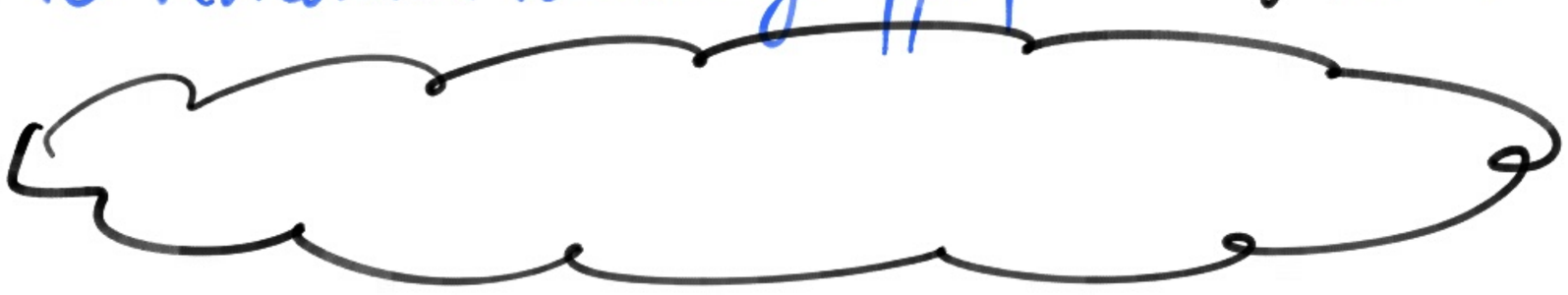
iii) $\Rightarrow$ i) ?

2) i) $\Rightarrow$ ii) ?

On a $\ker(f) = \ker(f^2)$
Et on veut montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
D'après le théorème du rang appliqué à f nous a



Et d'après le théorème du rang appliqué à f^2 nous a



D'où .....

ii) $\Rightarrow$ iii) ?

En procédant comme ci-dessus, on tire que
$$\dim(\ker(f)) = \dim\left(\ker(f^2)\right)$$

Soit $\ker(f) = \ker(f^2)$.

On veut montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Alors ça reste à montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

Soit alors $x \in$ ..... Montrer que .....

iii) $\Rightarrow$ i) ?

On veut montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$

Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$:

Soit $x \in$ .. Montrer que $x \in$ .....

.....

Montrer que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$:

Soit $x \in \ker(f^2)$. Montrer que $x \in \ker(f)$.

On a $f^2(x) = 0 \Rightarrow$ .....

3) i)

$f' : Im(f) \longrightarrow E$
$x \longmapsto f'(x) = f(x)$

a) M. que $\ker(f') = \ker(f) \cap Im(f)$:

$\ker(f') \overset{déf}{=} \{x \in \ldots / \ldots = 0\}$

b) M que $Im(f') = Im(f^2)$

$Im(f') \overset{déf}{=} \{f'(x) / x \in Im(f)\}$

$= \ldots$

ii) Déduisons que $rg(f) = rg(f^2) + \dim(\ker(f) \cap Im(f))$

Appliquons le théorème du rang à $\ldots$

Exercice 13

$\dim(E) = n$
$u \in \mathcal{L}(E)$
$I_p = \mathrm{Im}(u^p)$; $K_p = \mathrm{Ker}(u^p)$

1) i) $K_p \subset K_{p+1}$?

$x \in K_p \Rightarrow u^p(x) = 0$

$\Rightarrow$ - - -

- - - -

Conclusion

ii) $I_{p+1} \subset I_p$?

$x \in I_{p+1} \Rightarrow (\exists t \in E, x = u^{p+1}(t))$

$\Rightarrow$ - - - -

- - - -

2) Supposons que u est injectif :

i) $I_p = ?$

$I_p = \mathrm{Im}(u^p)$ et $u^p \in \mathcal{L}(E)$

u injectif $\Rightarrow u^p$ et ...

et E de dimension finie

D'où - - - - - -

ii) $K_p = ?$ Simple, non ?!

3) Supposons que u n'est pas injectif.

i) M que : $(\exists\, 0 \leq p \leq n, K_p = K_{p+1})$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que :

$(\forall\, 0 \leq p \leq n, K_p \neq K_{p+1})$

Or K_p est un sev de ..... Car $K_p \subset K_{p+1}$

Abs $\forall\, 0 \leq p \leq n, \dim(K_p) \ldots\ldots \dim(K_{p+1})$

Ainsi $\begin{cases} \dim(K_0) \dots \dim(K_1) \\ \dim(K_1) \dots \dim(K_2) \\ \vdots \\ \dim(K_{n-1}) \dots \dim(K_n) \end{cases}$

Sommer et simplifier .....

ii) a) $I_n = I_{n+1}$?

ii) Montrer que :

a) $I_r = I_{r+1}$

b) $\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p}$

On a $K_n = K_{n+1}$

Appliquons le théorème du rang aux endomorph u et v ..., on a .....

.....

b) Il que : $(\forall p \in \mathbb{N},\ K_n = K_{n+p})$

Faisons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

4) Montrer que $E = K_r \oplus I_r$

4) Il s'agit de montrer que :

{ i) $K_r \cap I_r = \{0\}$

ii) dim( ) = dim( ) + dim( )

Exercice 14

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
$\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$

$$ker(f) = ker(g) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{K}^*,\ g = \alpha f)$$

($\Leftarrow$)

$x \in ker(g) \Leftrightarrow \dots \dots \Leftrightarrow x \in ker(f)$

($\Rightarrow$) Supp que $ker(f) = ker(g)$
M qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \alpha f$:

Ona ker(f) sev de E.
Soit G un sev supplémentaire de ker(f) (càd ker(g))
Ona $E = ker(f) \oplus G$

Notons que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$g = \alpha f \Leftrightarrow \begin{cases} g = \alpha f \text{ sur } ker(f) \\ g = \alpha f \text{ sur } G \end{cases}$$

Et sur ker(f), on a bien $g = \alpha f$

Reste à montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \alpha f$ sur G.

dim(ker(f)) = ? via le théorème du rang :

⋮

Conclure .....

Exercice 15

f et g ∈ $\mathcal{L}(E)$ vérifiant : $fg - gf = I_E$

1) Par récurrence.

1) Montrer que

   i) $\forall n \geq 1,\ fg^n - g^n f = ng^{n-1}$

   ii) $\forall n \geq 1,\ f^n g - gf^n = nf^{n-1}$

1) i) M que : $\forall n \geq 1, (I_E, f, \dots, f^n)$ est libre

Par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation : M que (I_E, f) est libre

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha I_E + \beta f = 0$.

M que $\alpha = \beta = 0$.

Composons par g, on aura : { ---- = 0

---- = 0

..... et Conclure

Hérédité

Soit $n \geq 1$.

Supposons que $(I_E, f, \dots, f^n)$ est libre.

Et montrons que $(I_E, f, \dots, f^{n+1})$ est libre.

Soit alors $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_0 I_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n+1} f^{n+1} = 0 \quad (\Omega)$$

Montrons que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$

Composons dans (Ω) par g.

$\Rightarrow$ {

3) En déduire que E est de dimension infinie.

3) Raisonnons par l'absurde .....

4) On veut un exemple.
Vérifier que $(E=\mathbb{R}[X],\ f(P) = P'$ *et* $g(P) = XP)$ *convient.*

4) Il s'agit de vérifier que les applications f et g ici vérifient $f, g \in L(E)$ et $fg - gf = I_E$.