Concours National Commun
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I
Session 2023 - Filière MP

m.laamoum@gmail.com [1]

Exercice
Un problème d'extremum

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1 F est une fonction polynomiale donc elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6$$

1.2 (x_0, y_0) est un point critique de F si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 3 \ = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

ce système admet une solution unique $(x_0, y_0) = (0, 3)$, qui est l'unique point critique de F. .

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1 On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \ , \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

2.2 La matrice Hessienne de F au point (x_0, y_0) s'écrit

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 3$ dont les racines sont $\{1, 3\}$.
$H_f(x_0, y_0)$ est symétrique réelle et admet deux valeurs propres strictement positives , elle est donc symétrique définie et positive , par suite (x_0, y_0) est un minimum local.

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$ donc $x = u$ et $y = v + 3$, on remplace dans F

$$\begin{aligned} F(x,y) &= u^2 + u(v+3) + (v+3)^2 - 3u - 6(v+3) \\ &= u^2 + uv + 3u + v^2 + 6v + 9 - 3u - 6v - 18 \\ &= u^2 + uv + v^2 - 9 \end{aligned}$$

1. `https://tinyurl.com/2qyzzrbd`

3.2 On a $F(x_0, y_0) = -9$ donc

$$\begin{aligned} F(x,y) - F(x_0,y_0) &= u^2 + uv + v^2 \\ &= \left(u^2 + 2.u\frac{v}{2} + \frac{v^2}{4}\right) + \frac{3v^2}{4} \\ &= \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} \end{aligned}$$

par suite $F(x,y) - F(x_0,y_0) \geq 0$ pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, cette inégalité est stricte si $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ donc F présente un minimum absolu strict au point (x_0,y_0).

Problème

Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

Notations

I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f$$

1ère Partie

Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ Application au cas où f est 2π-périodiques .

1.1 Σ_0 est une partie non vide de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, $0 \in \Sigma_0$, stable par combinaison linéaire (*simple à vérifier*) , donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Les solutions réelles de cette équation , linéaire homogène de second ordre, sont de la forme

$$y : x \mapsto a\cos x + b\sin x$$

donc Σ_0 est de dimension 2 dont une base est la famille $(\cos, \sin)$.

1.2 Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$

Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t \text{ d}t$ et $\varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t \text{ d}t$.

1.2.1 f est continue sur I donc les fonctions $t \mapsto f(t)\cos t$ et $t \mapsto f(t)\sin t$ sont continues , par suite φ_1 et φ_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\varphi_1'(x) = f(t)\cos t$ et $\varphi_2'(x) = f(t)\sin t$ pour tout $x \in I$.

1.2.2 Soit $x \in I$,on a

$$\begin{aligned} \varphi_{f,x_0}(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\text{d}t \\ &= \int_{x_0}^{x} f(t)(\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)\text{d}t \\ &= \sin(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\sin(t)dt \\ &= \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x \end{aligned}$$

Donc $\varphi_{f,x_0}(x_0) = 0$.

1.2.3 φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ_{f,x_0} l'est aussi et

$$\begin{aligned} \varphi_{f,x_0}'(x) &= \varphi_1'(x)\sin x + \varphi_1(x)\cos x - \varphi_2'(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x \\ &= f(x)\cos x.\sin x \ + \varphi_1(x)\cos x - \ f(t)\cos .x\sin x + \varphi_2(x)\sin x \\ &= \varphi_1(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_{f,x_0}'(x_0) = 0$.

1.2.4 φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ'_{f,x_0} est dérivable sur I par suite φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et

$$\begin{aligned}
\varphi''_{f,x_0}(x) &= \varphi'_1(x)\cos x - \varphi_1(x)\sin x + \varphi'_2(x)\sin x + \varphi_2(x)\cos x \\
&= f(x)\cos^2 x \ - \varphi_1(x)\sin x + \ f(t)\sin^2 x + \varphi_2(x)\cos x \\
&= f(x) + \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x \\
&= -\varphi_{f,x_0}(x) + f(x)
\end{aligned}$$

ainsi φ_{f,x_0} est solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$

1.2.5 Soit ψ une solution de $(\mathscr{L}_f)$ telle que $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$, posons $Y = \psi - \varphi_{f,x_0}$, alors elle vérifie $Y'' + Y = 0$ et il existe a et b tel que $y(x) = a\cos x + b\sin x$ de plus on a $Y(x_0) = Y'(x_0) = 0$ donc

$$\begin{cases} a\cos x_0 + b\sin x_0 = 0 \\ -a\sin x_0 + b\cos x_0 = 0 \end{cases}$$

le déterminant de ce système est égale 1 , sa matrice est inversible il admet donc une unique solution et $a = b = 0$ d'où $Y = 0$ et $\psi = \varphi_{f,x_0}$.

Ainsi φ_{f,x_0} est l'unique solution, sur I, du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

1.3. De la même façon , si ψ une solution de $(\mathscr{L}_f)$ sur I, alors $y = \psi - \varphi_{f,x_0}$ vérifie $y'' + y = 0$, donc il existe a et b tel que $y(x) = a\cos x + b\sin x$, d'où

$$\psi(x) = a\cos x + b\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne le résultat.

1.4. On suppose que $I = R$ et que f est 2π-périodique.

1.4.1. Soit g une solution 2π-périodique de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

i) D'après 1.3 avec $x_0 = 0$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

ii) Soit x un réel , on a $g(x) = g(x+2\pi)$ donc

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x+2\pi-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

la relation de Chasles donne $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0.$

iii) En particulier

→ Si $x = 0$ alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0.$

→ Si $x = \dfrac{\pi}{2}$ alors

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\sin(\frac{\pi}{2}-t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0.$$

écrivons

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

un changement de variable $t = u + 2\pi$ donne

$$\int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u+2\pi)\cos(u+2\pi)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\cos(u)\mathrm{d}u.$$

d'où

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$$

1.4.2. On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\ \mathrm{d}t = 0.$

i) Soit x un réel , on a

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_x^0 f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$$

le changement de variable $t = u + 2\pi$ donne $\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$, donc

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

d'autre part

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \sin(x)\underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt}_{=0} - \cos(x)\underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt}_{=0} = 0$$

d'où

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

ii) On a $\varphi_{f,0}(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned}\varphi_{f,0}(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'après i) $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$ donc $\varphi_{f,0}(x+2\pi) = \varphi_{f,0}(x)$ et $\varphi_{f,0}$ est 2π-périodique.
Soit g une solution de $(\mathscr{L}_f)$, il existe λ et μ tels que

$$\begin{aligned}g(x) &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \varphi_{f,0}(x)\end{aligned}$$

$\varphi_{f,0}$, cos et sin sont 2π-périodiques donc g est 2π-périodique .

1.4.3. Si $f\ (x) = \sin(x)$, les solutions de $(\mathscr{L}_f)$ sont de la forme
$g : x\mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + \varphi_{f,0}(x)$ avec

$$\begin{aligned}\varphi_{f,0}(x) &= \int_0^x \sin(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\\ &= \sin(x)\int_0^x \sin(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin^2(t)dt\end{aligned}$$

on a

$$\int_0^x \sin(t)\cos(t)dt = \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin^2(t)dt &= \int_0^x \frac{1-\cos(2x)}{2}dt\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\end{aligned}$$

ainsi

$$\varphi_{f,0}(x) = \frac{1}{2}\sin^3(x) - \cos(x)(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x)$$

$\varphi_{f,0}$ n'est pas $2\pi-$périodique donc l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ n'admet pas de solution 2π-périodique.

2ème Partie

Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

2.1. Convergence d'intégrales

2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET

i) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\rightarrow$ En 0 : On a $\dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1-(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^2} = \dfrac{1}{2}+o(1)$ donc $\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0^+}{\rightarrow} \frac{1}{2}$.

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0,1]$.

$\rightarrow$ En $+\infty$: $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \le \dfrac{1}{t^2}$, la fonction $\longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'où la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

ii) Soit $x>0$. On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x \frac{(1-\cos t)'}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

iii) $\rightarrow$ On a $\dfrac{\sin t}{t} \underset{t\to 0^+}{\rightarrow} 1$ donc $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 etelle est intégrable sur $]0,1]$ ainsi l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge .

$\rightarrow$ D'après i) la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ converge et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

2.1.2. Soit $x>0$. On a

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x \frac{(\sin t)'}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right| \le \dfrac{1}{t^2}$, donc $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ converge et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, ains l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ est convergente.

2.2. $I =]0,+\infty[$ et $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

2.2.1. Analyse : On suppose que ψ est une solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ ayant 0 pour limite en $+\infty$.

i) Soit $x \in]0,+\infty[$, d'après 1.3 avec $x_0 = 1$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \lambda \cos x + \mu \sin x + \sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t - \cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x\end{aligned}$$

ii) ψ tend vers 0 en $+\infty$ donc les deux suites $(\psi(2n\pi))_{n\geqslant 1}$ *et* $\left(\psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)_{n\geqslant 1}$ convergent vers 0 en $+\infty$. On a

$$\psi(2n\pi) = \lambda - \int_1^{2n\pi} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = (-1)^n \left(\mu + \int_1^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)$$

par passage à la limite en $+\infty$ on obtient

$$\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mu = -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t.$$

iii) On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(-\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t. + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x \\ &= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

2.2.2. Synthèse : d'après la question précèdente on a

$$\psi_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t$$

avec $\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\mu = -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$, donc ψ_1 est solution de $(\mathscr{L}_f)$ sur $]0,+\infty[$.
Et aussi

$$\psi_1(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$$

donc

$$|\psi_1(x)| \leq \left|\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right| + \left|\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right|$$

les deux intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$ convergent donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi_1(x) = 0$.
Ainsi ψ_1 est solution, sur $]0,+\infty[$, de $(\mathscr{L}_f)$ et elle admet 0 pour limite en $+\infty$.

2.3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre

2.3.1. Soit $x \geqslant 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\left|\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ l'est aussi .

On pose $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t, \quad x \geqslant 0.$

2.3.2. $h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = [\arctan x\ ]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$

2.3.3. La fonction $(x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[\times [0,+\infty[$ et elle est dominée par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Le théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre donne la continuité de h sur $[0,+\infty[$.

2.3.4. Pour tout $x>0$ on a $|h(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$, donc h tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

(*on peux le faire avec le théorème de la convergence dominée...*)

2.3.5. La fonction $g : (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$$

Soit $[a,b]\subset]0,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \frac{b^2e^{-at}}{1+a^2} = \varphi(t)$, la fonction φ est intégrable. Donc h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ pour tout $[a,b]\subset]0,+\infty[$ par suite h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et

$$h''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

2.3.6. Soit $x>0$, on a

$$\begin{aligned} h''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1-1)e^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x} - h(x) \end{aligned}$$

d'où $h''(x)+h(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.3.7. h est solution, sur $]0,+\infty[$, de $(\mathscr{L}_f)$ et elle admet 0 pour limite en $+\infty$,d'après 2.2.2 on a

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{t} dt \underset{t=x+s}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{x+s} ds$$

2.4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet.

2.4.1. Soit $x>0$, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{x\sin t}{t(x+t)}\ \mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^{1} \frac{x\sin t}{t(x+t)}\ \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{x\sin t}{t(x+t)}\ \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant x\left|\int_0^{1} \frac{\sin t}{t}\frac{1}{x+t}\ \mathrm{d}t\right| + x\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} \mathrm{d}t\right| \end{aligned}$$

et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\frac{1}{x+t}\ \mathrm{d}t \geq 0$ donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant x\int_0^{1} \frac{\sin t}{t}\frac{1}{x+t}\ \mathrm{d}t + x\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} \mathrm{d}t\right|$$

2.4.2. Soit $x>0$, on a :

$\rightarrow$ pour tout t dans $]0,1]$ $,0 \leq \dfrac{\sin t}{t} \leq 1$ donc

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\frac{1}{x+t}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t}\ \mathrm{d}t = \ln(x+1) - \ln x$$

$\rightarrow$ pour tout t dans $[1,+\infty[$ $\dfrac{1}{t(x+t)} \leq \dfrac{1}{t^2}$ par suite

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)} \mathrm{d}t\right| \leq \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t(x+t)}\right| \mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(x+t)} \mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

d'où

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

2.4.3. De la question précédente on a

$$\left|h(x)-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right|\leqslant x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t\quad \forall x>0$$

et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\right)\ \mathrm{d}t=0$ par suite $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$. or $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=h(0)=\frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

3ème Partie

Application à l'étude de la somme d'une série de fonctions

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *de fonctions définies sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *par :*

$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times[0,+\infty[,\ u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

3.1 Soit $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $x\mapsto e^{-nx}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$, donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|u_n(x)|=\dfrac{1}{1+n^2}$, la série$\sum\frac{1}{1+n^2}$ converge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3.2. Soit $a>0$, on a $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[}|nu_n(x)|=\dfrac{ne^{-na}}{1+n^2}$ et $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[}\left|n^2u_n(x)\right|=\dfrac{n^2e^{-na}}{1+n^2}$.

Pour tout $\alpha\geq 0$ on a $\dfrac{n^\alpha e^{-na}}{1+n^2}\underset{n\to+\infty}{=}o(\dfrac{1}{n^2})$ donc $\sum\frac{n^\alpha e^{-na}}{1+n^2}$ converge , on en déduit que les séries de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}nu_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}n^2u_n$ convergent normalement sur l'intervalle $[a,+\infty[$

On pose $u(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2},\quad x\geqslant 0$.

3.3. Quelques propriétés de la fonction u

3.3.1. La série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement , donc uniformément, sur $[0,+\infty[$ et les fonctions u_n sont continue sur $[0,+\infty[$, le théorème de continuité des série de fonctions assure la continuité de u sur $[0,+\infty[$.

3.3.2. La série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement , donc uniformément, sur $[0,+\infty[$ et $u_n(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$, le théorème d'interversion de limite et somme donne :

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=0$$

Autre méthode : si $x>0$ alors $|u(x)|\leq\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$.

3.3.3. Les fonction u_n sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $u_n''(x)=\dfrac{n^2e^{-nx}}{1+n^2}$.
Soit $a>0$, d'après 3.2 la serie $\sum\limits_{n\geq 1}u_n''$ converge normalement et uniformément sur $[a,+\infty[$, donc u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,+\infty[$, ceci est valable pour tout $a>0$, par suite u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et $u''(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2e^{-nx}}{1+n^2}$.

3.3.4. Soit $x>0$, on a

$$\begin{aligned}u''(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n^2+1-1)e^{-nx}}{1+n^2}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\\&=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-u(x)\end{aligned}$$

d'où

$$u''(x)+u(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

3.3.5. u est une solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $\mathscr{L}_f$ avec $f:x\mapsto \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$, d'après 1.3 *(avec* $x_0=1$*)* il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x>0,\quad u(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x+\int_1^x \frac{1}{e^t-1}\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

3.4. Une autre expression intégrale de la fonction u

3.4.1. Soit $a>0$, la fonction $t\longmapsto \frac{1}{e^t-1}$ est continue sur $[a,+\infty[$ et $\frac{1}{e^t-1}\underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$ donc la fonction $t\longmapsto\frac{1}{e^t-1}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$.

3.4.2. Soit $a>0$, on a $\left|\frac{1}{e^t-1}\sin t\right|\leq\frac{1}{e^t-1}$ et $\left|\frac{1}{e^t-1}\cos t\right|\leq\frac{1}{e^t-1}$, la fonction $t\longmapsto\frac{1}{e^t-1}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ donc les fonctions $t\longmapsto$ et $t\longmapsto\frac{1}{e^t-1}\cos t$ sont intégrables sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

3.4.3. Soit $x>0$,on a

$$\begin{aligned}u(x)&=\alpha\cos x+\beta\sin x+\int_1^x\frac{1}{e^t-1}\sin(x-t)\mathrm{d}t\\&=\cos x\left(\alpha-\int_1^x\frac{\sin t}{e^t-1}\mathrm{d}t\right)+\sin x\left(\beta+\int_1^x\frac{\cos t}{e^t-1}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

d'après 3.3.2 on a $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$, par analogie avec la question 2.2.1 les suites $(u(2n\pi))_{n\geqslant1}$ *et* $\left(u\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)_{n\geqslant1}$ convergent vers 0 en $+\infty$ ce qui donne

$$\alpha=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t-1}\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad\beta=-\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{e^t-1}\mathrm{d}t\quad\textit{(les deux intégrales converges d'après 3.4.2)}$$

donc

$$\begin{aligned}u(x)&=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t-1}\mathrm{d}t-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{e^t-1}\mathrm{d}t\\&=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\\&\underset{t=s+x}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\sin s}{e^{x+s}-1}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Ce qui prouve, aussi, que u est l'unique solution, sur $]0,+\infty[$, de $(\mathscr{L}_f)$ qui admet 0 pour limite en $+\infty$.

3.5. Posons $\varphi:t\longmapsto\dfrac{\sin t}{e^t-1}$

- On a :

$\to$ $\dfrac{\sin t}{e^t-1}=\dfrac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{e^t-1}{t}}$ donc $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin t}{e^t-1}=1$, la fonction φ est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.

$\to$ $\left|\frac{1}{e^t-1}\sin t\right|\leq\frac{1}{e^t-1}$ et $\frac{1}{e^t-1}\underset{t\to+\infty}{\sim}e^{-t}$ donc la fonction $t\longmapsto\frac{1}{e^t-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par suite φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi la fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Soit $t>0$, le développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$ pour $|z|<1$ conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{\sin t}{e^t-1}&=\frac{e^{-t}\sin t}{1-e^{-t}}\quad(e^{-t}<1)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin t\;e^{-nt}\end{aligned}$$

posons $f_n:t\mapsto\sin t\;e^{-nt}$.

Première méthode : Par le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$.

$\triangleright$ les fonctions f_n sont continues et $|f_n(t)|\leq e^{-nt}$ donc les f_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

▷ la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers φ qui est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.
▷ de plus, on a :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} te^{-nt}\mathrm{d}t$$

et

$$\int_0^{+\infty} te^{-nt}\mathrm{d}t \overset{x=nt}{=} \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$$

donc la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge .

Le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right)$$

et on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin t\; e^{-nt}dt\\ &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-n)t}dt\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-n)t}}{i-n}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{n-i}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{n+i}{n^2+1}\right)\end{aligned}$$

ainsi $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n^2+1}$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

Deuxieme méthode : Par le théorème de convergence dominée
Posons $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, on a :
▷ les fonctions f_n et φ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.
▷ les fonctions S_n sont donc continues et intégrables sur $]0,+\infty[$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur $]0,+\infty[$ vers φ.
De plus, on a :

$$|S_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\sin t|\,\mathrm{e}^{-kx} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |\sin t|\,\mathrm{e}^{-kx} = \frac{|\sin t|}{\mathrm{e}^x-1}$$

donc $|S_n(x)| \leq |\varphi(x)|$ avec $|\varphi|$ continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de convergence dominée appliqué à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} S_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\ dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} f_k(x)\ dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(x)\ dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}
\end{aligned}$$

• • • FIN • • •