

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
 c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
 c) Déduire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$. Calculer ainsi $P_3(X)$ et $P_4(X)$.
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) - 2XP_{n+1}(X) + (1+X^2)P_n(X) = 0$.
 b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n = P_n(x)$, on a donc $u_0 = 1$ et $u_{n+2} = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n$. Exprimer u_n en fonction de n et x .
 c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \frac{1}{2i} [(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}]$.
- 5) a) Montrer que le polynôme $P_n(X)$ admet n racines réelles (que l'on calculera).
 b) Factoriser le polynôme $P_n(X)$.
 c) Calculer la somme et le produit des racines de $P_n(X)$ (on distinguera les cas suivant la parité de n).

Solution

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.

$$P_1(x) = 2 \times \underbrace{P_0(x)}_{=1} - \frac{1}{1} \cdot (1+x^2) \underbrace{P'_0(x)}_{=0} \quad (P_0(x)=1)$$

$$P_1(x) = 2x$$

$$P_2(x) = 2 \times \underbrace{P_1(x)}_{=2x} - \frac{1}{2} (1+x^2) \cdot \underbrace{P'_1(x)}_{=2} \quad (P_1(x)=2x)$$

$$P_2(x) = 4x^2 - (1+x^2)$$

$$P_2(x) = 3x^2 - 1$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Par $n=0$

$$\text{On a } \deg(P_0) = \deg(1) = 0 \leq 0$$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\deg(P_n) \leq n$ et Montrons $\deg(P_{n+1}) \leq n+1$.

$$\text{On a } P_{n+1}(x) = 2x \cdot P_n(x) - \frac{1}{n+1} (1+x^2) \cdot P'_n(x)$$

$$\begin{cases} \deg(2x \cdot P_n(x)) \leq n+1 & \text{car } \deg(P_n) \leq n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \deg\left(\frac{1}{n+1} (1+x^2) P'_n(x)\right) \leq n+1 & \text{car } \deg(P'_n) \leq n-1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \deg\left(2x \cdot P_n(x) - \frac{1}{n+1} (1+x^2) \cdot P'_n(x)\right) \leq n+1$$

$$\text{Càd } \deg(P_{n+1}(x)) \leq n+1$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que : $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$

$$\text{On a : } P_{n+1}(x) = 2x \cdot P_n(x) - \frac{1}{n+1} (1+x^2) \cdot P'_n(x)$$

Le Coefficient de X^{n+1} dans $P_{n+1}(x)$ est a_{n+1} .

D'autre part :

Le Coefficient de X^{n+1} de $2x \cdot P_n(x)$ est $2a_n$.

Le Coefficient de X^{n+1} de $-\frac{1}{n+1}(1+X^2) \cdot P_n'(X)$ est $-\frac{1}{n+1} \cdot n a_n$

Alors par sommation, on a que :

Le Coefficient de X^{n+1} de $P_{n+1}(X)$ est $\left(2a_n - \frac{n}{n+1} a_n\right) = \frac{n+2}{n+1} a_n$

Enfin :

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$. En déduire que $a_n = n+1$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n+1$

Initialisation : Pour $n=0$

$P_0(X) = 1 \Rightarrow a_0$ le coefficient de X^0 de $P_0(X)$, est égal à 1

$$\Rightarrow a_0 = 1 = 0+1$$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_n = n+1$ et all. que $a_{n+1} = n+2$.

$$\text{On a } a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n = \frac{n+2}{n+1} \cdot (n+1) = n+2 \quad \square$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
- c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $\deg(P_n) \leq n$ et $a_n = n+1 \neq 0$

2) ou

$$\deg(P_n) = n$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
 - b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
 - c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?

$$2) i) \text{ M. que : } (\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X))$$

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n=0$

$$\text{On a } P_0(X) = 1$$

$$\text{Alors } \begin{cases} P_0(-X) = 1 \\ (-1)^0 \cdot P_0(X) = 1 \end{cases}$$

Donc $P_0(-x) = (-1)^0 P_0(x)$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

Et montrons que $P_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1} P_{n+1}(x)$

On a : $P_{n+1}(x) = 2x \cdot P_n(x) - \frac{1}{n+1} (1+x^2) \cdot P_n'(x)$

$$\Rightarrow P_{n+1}(-x) = -2x P_n(-x) - \frac{1}{n+1} (1+x^2) P_n'(-x)$$

Or $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, alors par dérivation :

$$(P_n(-x))' = ((-1)^n P_n(x))'$$

$$\Rightarrow -P_n'(-x) = (-1)^n P_n'(x)$$

Donc : $P_{n+1}(-x) = -2x P_n(-x) - \frac{1}{n+1} (1+x^2) P_n'(-x)$

$$= -2x \cdot (-1)^n P_n(x) + \frac{1}{n+1} (1+x^2) \cdot (-1)^n P_n'(x)$$

$$= (-1)^{n+1} \left(2x P_n(x) - \frac{1}{n+1} (1+x^2) P_n'(x) \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= P_{n+1}(x)}$

$$= (-1)^{n+1} P_{n+1}(x)$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?

2)ii) Que dire alors de la parité de $P_n(x)$?

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$\text{Alors } \begin{cases} P_n(-x) = P_n(x) & \text{si } n \text{ est paire} \\ P_n(-x) = -P_n(x) & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Par suite

P_n est paire si n est paire

P_n est impaire si n est impaire.

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
 c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.

3) a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(x) = (n+2)P_n(x)$$

Initialisation : Pour $n=0$

$$\text{On a } P'_{0+1}(x) = P'_1(x) = 2$$

$$P_1(x) = 2x$$

$$\text{Et } (0+2)P_0(x) = 2 \quad (\text{car } P_0(x) = 1)$$

Donc la propriété est vraie pour $n=0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Supposons que } P'_{n+1}(x) = (n+2)P_n(x).$$

$$\text{Et montrons que } P'_{n+2}(x) = (n+3)P_{n+1}(x).$$

$$\text{On a } P_{n+2}(x) = 2XP_{n+1}(x) - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P'_{n+1}(x)$$

$$\begin{aligned} P'_{n+2}(x) &= 2P'_{n+1}(x) + 2XP'_{n+1}(x) - \frac{1}{n+2} \cdot 2XP'_{n+1}(x) - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P''_{n+1}(x) \\ &= 2XP'_{n+1}(x) \\ &= 2X \frac{n+1}{n+2} P'_{n+1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2P_{n+1}(x) + 2x \frac{n+1}{n+2} P'_{n+1}(x) - \frac{1}{n+2} (1+x^2) P''_{n+1}(x) \\
&= 2P_{n+1}(x) + 2x(n+1) \cdot P_n(x) - (1+x^2) P'_n(x)
\end{aligned}$$

Car: $P'_{n+1}(x) = (n+2) P_n(x) \Rightarrow \left(\frac{P'_{n+1}(x)}{n+2} = P_n(x) \right) \text{ et } \frac{P''_{n+1}(x)}{n+2} = P'_n(x)$

$$P'_{n+2}(x) = 2P_{n+1}(x) + (n+1) \left(2x P_n(x) - \frac{1}{n+1} (1+x^2) P'_n(x) \right) = P_{n+1}(x)$$

Donc

$$P'_{n+2}(x) = (n+3) P_{n+1}(x).$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(x) = 2x P_n(x) - \frac{1}{n+1} (1+x^2) P'_n(x))$

$$x=0 \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(0) = \frac{-1}{n+1} P_n'(0))$$

$$\text{Et 3)a) } \Rightarrow (\forall n \geq 1, P_n'(x) = (n+1) P_{n-1}(x))$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 1, P_n'(0) = (n+1) P_{n-1}(0))$$

$$\text{D'où : } (\forall n \geq 1, P_{n+1}(0) = -P_{n-1}(0)) \quad (Q)$$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \geq 0, P_{2n+1}(0) = 0)$

Initialisation : Pour $n=0$:

$$\text{On a } P_1(0) = 0 \text{ car } P_1(x) = 2x$$

Hérédité :

Soit $n \geq 0$.

Supposons que $P_{2n+1}(0) = 0$ et M. que $P_{2n+3}(0) = 0$.

$$(Q) \Rightarrow P_{2n+3}(0) = - \underbrace{P_{2n+1}(0)}_{=0} = 0.$$

On montre de même par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n}(0) = (-1)^n$$

via (Q) et que $P_0(0) = 1$.

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 2x \\ P_0(x) &= 1 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} P_1(0) &= 0 \\ P_0(0) &= 1 \end{aligned}$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
 c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
 c) Déduire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$. Calculer ainsi $P_3(X)$ et $P_4(X)$.

3) c) i) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) - P_{n+1}(0) &= \int_0^x P'_{n+1}(t) dt \\ &= (n+2) \int_0^x P_n(t) dt, \text{ d'après 3) a).} \end{aligned}$$

Donc le résultat voulu.

3) c) ii) $P_3(x) = ?$ et $P_4(x) = ?$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \underbrace{P_3(0)}_{=0} + 4 \int_0^x \underbrace{P_2(t)}_{=3t^2-1} dt \\ &= 4 \int_0^x (3t^2 - 1) dt = 4 \left[t^3 - t \right]_0^x \end{aligned}$$

$$P_3(x) = 4(x^3 - x)$$

$$P_4(x) = \underbrace{P_4(0)}_{=P_{2,2}(0)=(-1)^2=1} + 5 \int_0^x \underbrace{P_3(t)}_{=4(t^3-t)} dt$$

$$= 1 + 20 \int_0^x (t^3 - t) dt = 1 + 20 \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} \right]_0^x$$

$$P_4(x) = 5x^4 - 10x^2 + 1$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
 c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
 c) Dédurre de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$. Calculer ainsi $P_3(X)$ et $P_4(X)$.
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) - 2XP_{n+1}(X) + (1+X^2)P_n(X) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - \frac{1}{n+2}(1+x^2)P'_{n+1}(x)$$

$$= 2xP_{n+1}(x) - (1+x^2)P_n(x) \text{ (d'après 3a)}$$

d'où le résultat voulu.

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
c) Dédurre de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$. Calculer ainsi $P_3(X)$ et $P_4(X)$.
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) - 2XP_{n+1}(X) + (1+X^2)P_n(X) = 0$.
b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n = P_n(x)$, on a donc $u_0 = 1$ et $u_{n+2} = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n$. Exprimer u_n en fonction de n et x .

4)b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a : } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = P_1(x) = 2x \end{cases}$$

Ainsi, on a la suite récurrente d'ordre 2 :

$$u_0 = 1 ; u_1 = 2x$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2xu_{n+1} + (1+x^2)u_n = 0$$

Son équation caractéristique est :

$$(E_c) \quad r^2 - 2xr + (1+x^2) = 0$$

$$\Delta = -4 = (2i)^2$$

Ses solutions complexes sont : $r_1 = x - i$ et $r_2 = x + i$

Il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A(x+i)^n + B(x-i)^n$$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ (x+i)A + (x-i)B = 2x \end{cases}$$

Réolvons ce système, on trouve : $A = \frac{1-xi}{2}, B = \frac{1+xi}{2}$

Enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{2} \left((1-xi)(x+i)^n + (1+xi)(x-i)^n \right)$$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
c) Dédire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$. Calculer ainsi $P_3(X)$ et $P_4(X)$.
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) - 2XP_{n+1}(X) + (1+X^2)P_n(X) = 0$.
b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n = P_n(x)$, on a donc $u_0 = 1$ et $u_{n+2} = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n$. Exprimer u_n en fonction de n et x .
c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \frac{1}{2i} [(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}]$.

4) c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On veut montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{1}{2i} \left((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} \right)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$P_n(x) = U_n \quad (\text{avec la notation dans 4) b)})$$

$$= \frac{1}{2} \left((1-xi)(x+i)^n + (1+xi)(x-i)^n \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \left((i+x)(x+i)^n + (i-x)(x-i)^n \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \left((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} \right)$$

□

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
 c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
 c) Déduire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$. Calculer ainsi $P_3(X)$ et $P_4(X)$.
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) - 2XP_{n+1}(X) + (1+X^2)P_n(X) = 0$.
 b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n = P_n(x)$, on a donc $u_0 = 1$ et $u_{n+2} = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n$. Exprimer u_n en fonction de n et x .
 c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \frac{1}{2i} [(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}]$.
- 5) a) Montrer que le polynôme $P_n(X)$ admet n racines réelles (que l'on calculera).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x+i)^{n+1} = (x-i)^{n+1} \quad (\text{d'après 4) c})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{n+1} = 1 \quad \left(\text{on a } x \neq i, \text{ car } x \in \mathbb{R} \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists 0 \leq k \leq n, \frac{x+i}{x-i} = e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \exists 1 \leq k \leq n, \frac{x+i}{x-i} = e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}$$

Car $k=0$ est impossible, car que $\frac{x+i}{x-i} \neq 1$

$$\Leftrightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x+i = e^{\frac{2k\pi i}{n+1}} (x-i)$$

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x(e^{\frac{2k\pi i}{n+1}} - 1) = i(e^{\frac{2k\pi i}{n+1}} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x = i \cdot \frac{e^{\frac{2k\pi i}{n+1}} + 1}{e^{\frac{2k\pi i}{n+1}} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x = i \cdot \frac{e^{\frac{k\pi i}{n+1}} \left(e^{\frac{k\pi i}{n+1}} + e^{-\frac{k\pi i}{n+1}} \right)}{e^{\frac{k\pi i}{n+1}} \left(e^{\frac{k\pi i}{n+1}} - e^{-\frac{k\pi i}{n+1}} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x = i \cdot \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}$$

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x = \cotan\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

Ainsi, le polynôme $P_n(x)$ possède n racines réelles qui

sont les $x_k = \cotan\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, où $1 \leq k \leq n$

On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X).$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
 c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
 c) Déduire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$. Calculer ainsi $P_3(X)$ et $P_4(X)$.
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) - 2XP_{n+1}(X) + (1+X^2)P_n(X) = 0$.
 b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n = P_n(x)$, on a donc $u_0 = 1$ et $u_{n+2} = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n$. Exprimer u_n en fonction de n et x .
 c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \frac{1}{2i} [(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}]$.
- 5) a) Montrer que le polynôme $P_n(X)$ admet n racines réelles (que l'on calculera).
 b) Factoriser le polynôme $P_n(X)$.

On a :

$$\begin{cases} \deg(P_n(X)) = n \\ \text{cd}(P_n(X)) = n+1 \\ P_n(X) \text{ admet } x_1, \dots, x_n \text{ comme racines, avec } x_k = \tan\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \end{cases}$$

D'où

$$P_n(X) = (n+1) \prod_{k=1}^n (X - x_k)$$

- 1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.
 c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1}(X) = (n+2)P_n(X)$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
 c) Déduire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$. Calculer ainsi $P_3(X)$ et $P_4(X)$.
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) - 2XP_{n+1}(X) + (1+X^2)P_n(X) = 0$.
 b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n = P_n(x)$, on a donc $u_0 = 1$ et $u_{n+2} = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n$. Exprimer u_n en fonction de n et x .
 c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \frac{1}{2i} [(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}]$.
- 5) a) Montrer que le polynôme $P_n(X)$ admet n racines réelles (que l'on calculera).
 b) Factoriser le polynôme $P_n(X)$.
 c) Calculer la somme et le produit des racines de $P_n(X)$ (on distinguera les cas suivant la parité de n).

5)c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculons $\sum_{k=1}^n x_k$ et $\prod_{k=1}^n x_k$, où les x_k sont les racines

du polynôme $P_n(x)$.

Notons $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

On a :

$$\sum_{k=1}^n x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n x_k = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

On a $a_n = n+1$ d'après 1)c).

$d_0 = P_n(0)$, qui dépend de la parité de n d'après 3)b).

$d_{n-1} = ?$: le coefficient de X^{n-1} de $P_n(x)$.

$$P_n(x) = \frac{1}{2i} \left((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} \right)$$

$$(x+i)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k i^{n+1-k}$$

$$\begin{cases} (x+i)^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} + C_{n+1}^n x^n i + C_{n+1}^{n-1} x^{n-1} i^2 + \dots \\ (x-i)^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} - C_{n+1}^n x^n i + C_{n+1}^{n-1} x^{n-1} i^2 + \dots \end{cases}$$

$$(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} = 2i (n+1) x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \dots$$

$$P_n(x) = (n+1) x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \dots$$

$$\Rightarrow d_{n-1} = 0$$

Donc : $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ et $\prod_{k=1}^n x_k = \frac{(-1)^n d_0}{n+1}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$

D'où :

$$\text{Si } n \text{ est impaire, } \prod_{k=1}^n x_k = 0$$

$$\text{Si } n \text{ est paire, } \prod_{k=1}^n x_k = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1}$$

$$\text{Car } d_0 = P_n(0) = P_{2 \cdot \frac{n}{2}}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=1}^n x_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1} & \text{si } n \text{ est paire} \end{cases}$$

Fin Problème N° 39