Centrale MP 2021 : épreuve 2
Un corrigé

II.A - Transformée de Fourier d'une fonction

20. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
    - Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
    - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
    - On a l'hypothèse de domination : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ |f(x)e^{-ix\xi}| \leq |f(x)|$ et la fonction $|f|$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$

    Ainsi, la fonction $\hat{f}$ est définie continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$$

21. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire (linéarité du passage à l'intégrale). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ix\xi}|\, dx = \|f\|_1$$

et donc $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Ceci montre que l'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ est continue et même 1 lispchitzienne (pour les normes proposées).

$$\boxed{f \mapsto \hat{f} \text{ est continue de } \left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right) \text{ dans } (L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)}$$

22. f étant continue, g l'est aussi. De plus, le changement de variable linéaire $u = \lambda x$ donne

$$\int_0^a |g(x)|\ dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda a} |f(u)|\ du$$

et cette quantité admet une limite finie quand $a \to +\infty$ et aussi quand $a \to -\infty$. Il y a donc intégrabilité aux voisinage des infinis et

$$\boxed{g \in L^1(\mathbb{R})}$$

On peut alors écire $\hat{g}(\xi)$ et le même changement de variable donne

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\xi u/\lambda}\ du$$

et ainsi

$$\boxed{\hat{g}(\xi) = \tfrac{1}{\lambda}\hat{f}(\tfrac{\xi}{\lambda})}$$

II.B - Produit de convolution

23. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)| \|g\|_\infty$$

f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ l'est aussi, ce qui assure la définition de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable $u = x - t$ donne immédiatement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\ du = (g*f)(x)}$$

24. L'inégalité de la question précédente entraine que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |(f*g)(x)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$$

et ainsi

$$\boxed{f * g \text{ est bornée et } \|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty}$$

25. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(t)g(x-t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée p-ième $x \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$.
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall x, t \in \mathbb{R}$, $\forall p \in [\![0,k]\!]$, $\left|f(t)g^{(p)}(x-t)\right| \leq \|g^{(p)}\|_\infty |f(t)|$ et ce majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Le théorème s'applique et donne que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec

$$\boxed{(f*g)^{(k)} = f * \left(g^{(k)}\right)}$$

26. Par définition

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)e^{-ix\xi}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}f(t)g(x-t)\ dt\right)\ dx$$

Avec le résultat admis,

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t) g(x-t)\, dx \right)\, dt$$

On pose $u = x - t$ dans l'intégrale intérieure :

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u+t)\xi} f(t) g(u)\, du \right)\, dt$$

et on peut "faire sortir" de l'intégrale les termes indépendants de la variable u

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t) e^{-it\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\xi} g(u)\, du \right)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} \hat{g}(\xi)\, dt$$

Là encore $\hat{g}(\xi)$ peut sortir de l'intégrale et on obtient $\hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

$$\boxed{\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}}$$

Fin