

Ensembles et Applications

Résumé

I) Les Ensembles

1) Inclusion - Appartenance

Déf (Inclusion)

On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B si et seulement si tous les éléments de A appartiennent à B .

On note $A \subset B$.

Résumé

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in B)$$

$\forall B$

1) $A \not\subset B$ veut dire "A n'est pas inclus dans B".

2) $A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x \in A \text{ tel que } x \notin B)$

Vocabulaire

1) Un ensemble composé d'un seul élément a s'appelle un **singleton**.

2) Un ensemble composé de deux éléments s'appelle
une paire.

Prop

1) $x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a$

2) $\{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a = b$

3) $\{a\} \subset A \Leftrightarrow a \in A$

4) Supposons que $a \neq b$. On a :

$$x \in \{a, b\} \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x = b)$$

Prop

1) $\emptyset \subset A$

2) $A \subset A$

3) $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Leftrightarrow A = B$

4) $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

2) Ensemble des parties d'un ensemble

Notation et vocabulaire

1) Si $A \subset B$, on dit que aussi que A est une
partie de B .

On dit encore que B contient A .

2) Si $A \subset B$, on écrit aussi $B \supset A$.

Notation et vocabulaire

Soit E un ensemble.

1) L'ensemble formé par toutes les parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

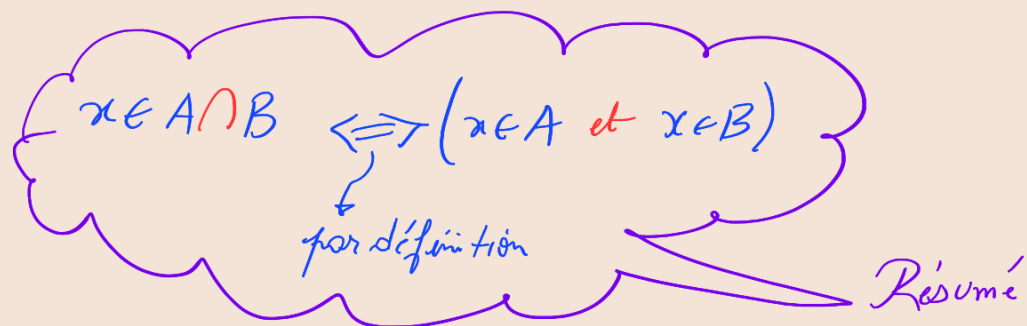
2) $\mathcal{P}(E)$ c'est l'ensemble des parties de E .

3) Intersection et réunion d'ensemble

Déf (Intersection)

1) L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à A et à B .

2) On la note $A \cap B$, et se lit « A inter B ».



Vocabulaire

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**.

Prop

1) $A \cap B = B \cap A$

2) $A \cap A = A$

3) $A \cap \phi = \phi$

4) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

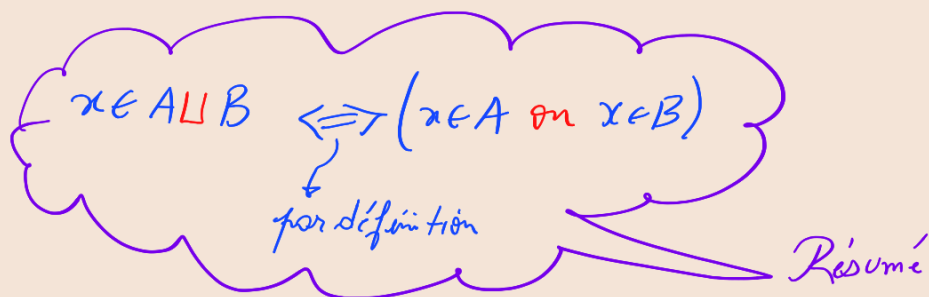
5) $\begin{pmatrix} A \subset B \\ A \subset D \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \subset (B \cap D)$

6) $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$

Déf (Réunion)

1) La réunion des ensembles A et B est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à A ou à B .

2) On la note $A \cup B$, et se lit « A Union B ».



Prop

1) $A \cup B = B \cup A$

2) $A \cup A = A$

3) $A \cup \phi = A$

4) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$$5) \begin{pmatrix} B & C & A \\ D & C & A \end{pmatrix} \Leftrightarrow (B \cup D) \cap A$$

$$6) (A \cup B) \supset A \quad \text{et} \quad (A \cup B) \supset B$$

$$7) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$8) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$9) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

On écrit $A \cap B \cap C$; sans parenthèses.

$$10) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

On écrit $A \cup B \cup C$; sans parenthèses.

4) Complémentaire d'une partie dans un ensemble

Déf

Soit $A \subset E$.

1) Le complémentaire de A dans E est la partie de E formée par les éléments qui n'appartiennent pas à A .

2) On la note C_E^A ou \bar{A} .

Résumé

$$1) \bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

2) Soit $x \in E$.

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

Prop

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$1) \overline{E} = \emptyset$$

$$2) \overline{\emptyset} = E$$

$$3) \overline{\overline{A}} = A \quad (\overline{(\overline{A})} \text{ se note } \overline{\overline{A}})$$

$$4) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$5) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$6) A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \supset \overline{B}$$

Prop

Soit $A \subset E$. On a :

$$1) A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$2) A \cup \overline{A} = E$$

Déf (Différence $A \setminus B$)

Soient A et B deux parties de E .

La différence $A \setminus B$ est la partie de E formée par les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B .

Résumé

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$$

Prop

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

5) Produit Cartésien d'ensembles

Déf

Soient E et F deux ensembles non vides.

1) $E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F \}$

2) C'est le produit Cartésien de E et F .

Résumé

$$(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F)$$

Déf

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n \}$$

Résumé

$$(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \Leftrightarrow (\forall 1 \leq i \leq n, x_i \in E_i)$$

Notations

1) $E \times E$ se note E^2 .

2) $\underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}}$ se note E^n .

Ainsi :

1) $(x, y) \in E^2 \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in E)$

2) $(x_1, \dots, x_n) \in E^n \Leftrightarrow (\forall 1 \leq i \leq n, x_i \in E)$

NB

1) $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow (x = a \text{ et } y = b)$

2) $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow (\forall 1 \leq i \leq n, x_i = y_i)$

b) Intersection et réunion quelconques

Déf

Soient A_1, \dots, A_n des parties de E .

1) $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n \Leftrightarrow (x \in A_1 \text{ et } \dots \text{ et } x \in A_n)$

2) $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n \Leftrightarrow (x \in A_1 \text{ ou } \dots \text{ ou } x \in A_n)$

Notations

1) $A_1 \cap \dots \cap A_n$ se note $\bigcap_{i=1}^n A_i$

2) $A_1 \cup \dots \cup A_n$ se note $\bigcup_{i=1}^n A_i$

Ainsi :

$$1) x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow (\forall 1 \leq i \leq n, x \in A_i)$$

$$2) x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow (\exists 1 \leq i \leq n, x \in A_i)$$

Généralement :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de E .

« Càd que : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset E$ »

$$1) a) \text{ On note } \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \text{ ou encore } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$$b) x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n)$$

$$2) a) \text{ On note } \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \text{ ou encore } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$$b) x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n)$$

Plus généralement

Soit I un ensemble non vide.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

« Càd que : $\forall i \in I, A_i \subset E$ »

$$1) x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I, x \in A_i)$$

$$2) x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I, x \in A_i)$$

Prop

$$1) a) A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

b) Càd :

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$$

c) En général :

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

$$2) a) A \cup (B_1 \cap \dots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap \dots \cap (A \cup B_n)$$

b) Càd :

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i)$$

c) En général :

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

$$3) a) \overline{A_1 \cap \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$$

b) Càd :

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

c) En général :

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$4) a) \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

b) Câd :

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

c) En général :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$5) \forall j \in I, \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \subset A_j$$

$$6) \forall j \in I, A_j \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$$

$$7) (\forall i \in I, A \subset B_i) \Leftrightarrow A \subset \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)$$

$$8) (\forall i \in I, A \supset B_i) \Leftrightarrow A \supset \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)$$

7) Partition d'un ensemble

Déf

Soient A_1, \dots, A_n des parties de E .

On dit que A_1, \dots, A_n forment une partition de E si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) A_1, \dots, A_n sont deux à deux disjoints.

$$2) E = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$$

Autrement dit

$$1) \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$2) E = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$$

Prop

Soit A une partie de E .

A et \bar{A} forment une partition de E .

Déf (Cas général)

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E si et ssi les deux conditions suivantes sont

satisfaites :

$$1) \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$2) E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$$

2) Égalité de deux applications

Déf

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: E' \rightarrow F'$ deux applications.

1) On dit que f et g sont égales si et seulement si

$$a) E = E' \text{ et } F = F'$$

$$b) \forall x \in E, f(x) = g(x)$$

2) On écrit $f = g$.

NB:

$\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E désigne l'ensemble des applications de E vers F .

3) Applications particulières

a) L'identité de E

Déf

On la note I_E ou id_E .

elle est définie par :

$$\begin{array}{l} I_E : E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$$

$$\forall x \in E, I_E(x) = x$$

b) L'indicatrice d'une partie

Déf

Soit $A \subseteq E$.

La fonction indicatrice de A se note 1_A et est définie par :

$$\begin{array}{l} 1_A : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in E, 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

4) Composée de deux applications

Déf

Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

La composée $g \circ f$ est l'application définie par :

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On a :

$$1) f \circ I_E = f$$

$$2) I_F \circ f = f$$

Corollaire

Soit $f \in E^E$. On a :

$$f \circ I_E = f$$

$$I_E \circ f = f$$

Attention

L'égalité $f \circ g = g \circ f$ est en général *fausse*.

NB

Soient $f, g \in \mathcal{F}(E, F)$.

$$f \neq g \Leftrightarrow (\exists x \in E, f(x) \neq g(x))$$

Ainsi pour vérifier que $f \neq g$, il suffit d'exhiber

Un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq g(x_0)$.

5) Image directe - Image réciproque

Déf (Image directe $f(A)$)

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Soit $A \subset E$.

L'image directe de A par f est la partie de F définie par :

$$f(A) = \{ f(x) / x \in A \}$$

Résumé

$$y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A, y = f(x))$$

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On a :

1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

2) i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

ii) $f(\bigsqcup_{i \in I} A_i) = \bigsqcup_{i \in I} f(A_i)$

3) i) $f(A \cap B) \subset (f(A) \cap f(B))$

ii) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

(Image réciproque)

Déf

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Soit $B \subset F$.

L'image réciproque de B par f est :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Résumé

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

par définition

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On a :

1) $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

2) a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \bigsqcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

3) a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

4) $f^{-1}(\bar{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

6) Applications injectives - Applications surjectives

a) Applications injectives

Déf

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

f est dite *injective* si et seulement si :

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

WB

Pour montrer qu'une application f n'est pas injective, il suffit qu'on présente deux éléments a et b de notre choix vérifiant $f(a) = f(b)$ et $a \neq b$.

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est injective

2) $(\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$

Prop

La composée de deux applications injectives est une application injective.

a) Applications surjectives

Déf

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

f est dite **surjective** si et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

↓ arrivée ↓ départ

Autrement dit

Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédant par f .

NB :

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Pour montrer que f **n'est pas surjective**, il suffit de présenter un élément de l'arrivée qui n'a pas d'antécédant.

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1) $f^{-1}(F) = E$

2) $f(E) \subset F$

3) $f(E) = F \Leftrightarrow f$ surjective

↳ départ ↳ arrivée

Prop

La composée de deux applications surjectives est une application surjective.

7) Applications bijectives

Déf

Une application est dite **bijective** quand elle est à la fois injective et surjective.

Prop

La composée de deux applications bijectives est une application bijective.

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

f est bijective $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x))$

8) Réciproque d'une bijection

Déf

Soit $f: E \rightarrow F$ une bijection.

La réciproque de f est l'application notée f^{-1} définie de F vers E qui associe à chaque $y \in F$ l'unique $x \in E$ vérifiant $y = f(x)$.

Résumé

Soit $f: E \rightarrow F$ une bijection.

1) $f^{-1}: F \rightarrow E$

2) $\forall y \in F, \forall x \in E$, on a :

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Prop

Soit $f: E \rightarrow F$ une bijection.

1) a) $\forall x \in F, f(f^{-1}(x)) = x$

b) $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$

2) a) $f \circ f^{-1} = I_F$

b) $f^{-1} \circ f = I_E$

Corollaire

Soit $f: E \rightarrow E$ une bijection. On a :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_E$$

Déf

Une bijection d'un ensemble E vers lui-même s'appelle
permutation de E .

Notation

$S(E)$: désignera l'ensemble des permutations de E .

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E|F)$.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) f est bijective.

b) $\exists g \in \mathcal{F}(F|E)$ telle que : $\begin{cases} f \circ g = I_F \\ g \circ f = I_E \end{cases}$

2) Dans ce cas, on a : $f^{-1} = g$

Notations

Soit $f \in \mathcal{K}^E = \mathcal{F}(E, E)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ se note f^n .

2) $f^0 = I_E$.

Prop

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. On a :

1) f^{-1} est aussi bijective.

2) Sa réciproque est :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Prop

1) La composée de deux bijections est une bijection.

2) (On a en plus :

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

9) Prolongement - Restriction

a) Prolongement

Déf

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit E' un ensemble contenant E . ($E \subset E'$)

On appelle **prolongement** de f à E' , toute application

$g : E' \rightarrow F$ vérifiant :

$$\forall x \in E, g(x) = f(x)$$

b) Restriction

Déf

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $A \subset E$.

La restriction de f à A est l'application notée $f|_A$ et

définie par: $f|_A : A \rightarrow F$

$$x \mapsto (f|_A)(x) = f(x)$$

III) Relation binaire

1) Généralités

Déf

Soit R une relation binaire sur un ensemble E .

1) R est dite **réflexive** si et seulement si :

$$\forall x \in E, x R x$$

2) R est dite **symétrique** si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, x R y \Rightarrow y R x$$

3) R est dite **anti-symétrique** si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \begin{pmatrix} x R y \\ y R x \end{pmatrix} \Rightarrow x = y$$

4) R est dite **transitive** si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E, (x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow x R z$$

2) Relation d'équivalence

Déf

Soit R une relation binaire sur un ensemble non vide E .

R est dite **relation d'équivalence** sur E si et ssi elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Relation de Congruence dans \mathbb{Z}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on définit la relation de congruence modulo n par :

$$a \equiv b [n] \Leftrightarrow n \mid (a-b)$$

2) $a \equiv b [n]$ se lit « a est congrus à b modulo n » \Rightarrow

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La congruence modulo n est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .

Déf (Classe d'équivalence)

Soit R une relation d'équivalence sur E .

Soit $a \in E$.

1) La classe d'équivalence de a est la partie \bar{a} de E définie par :

$$\bar{a} = \{x \in E \mid x R a\}$$

2) \bar{a} se note aussi $C(a)$.

$$\forall a \in E, \bar{a} \subset E$$

$$x \in \bar{a} \Leftrightarrow x R a$$

par déf

Résumé

Prop

Soit R une relation d'équivalence sur E .

Les propositions suivantes sont équivalentes:

1) $x R a$

2) $a R x$

3) $x \in \bar{a}$

4) $a \in \bar{x}$

5) $\bar{x} = \bar{a}$

Prop

Soient $x, a \in E$.

1) $\bar{x} \neq \bar{a} \Leftrightarrow \bar{x} \cap \bar{a} = \emptyset$

2) Deux classes d'équivalences, sont soit égales soit disjointes.

Prop

Soit R une relation d'équivalence sur E .

1) Les classes d'équivalence forment une partition de E .

2) Autrement dit:

Si $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ sont les classes d'équivalence de E , alors:

$$\alpha) \forall i \neq j, \bar{a}_i \cap \bar{a}_j = \emptyset$$

$$\beta) E = \bigsqcup_{i=1}^n \bar{a}_i$$

3) Relation d'ordre

Déf

Soit R une relation binaire sur un ensemble non vide E .
 R est dite **relation d'ordre** sur E si et ssi elle est à la fois **réflexive**, **anti-symétrique** et **transitive**.

Relations d'ordres usuelles (à savoir)

1) \leq est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .

2) \subset est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

3) $/$ est une relation d'ordre sur \mathbb{N} .

Vocabulaire

Si R est une relation d'ordre sur E , on dit que (E, R) est un ensemble **ordonné**.

Déf

Soit R une relation d'ordre sur E .

1) R est dite **relation d'ordre total** si et ssi :

$$(\forall x, y \in E, xRy \text{ ou } yRx)$$

2) Dans le cas contraire, R est dite **relation d'ordre partiel**.

Vocab:

- 1) Si R est dite relation d'ordre total, on dit que (E, R) est **totalement ordonné**.
- 2) Si R est dite relation d'ordre partiel, on dit que (E, R) est **partiellement ordonné**.

Jusqu'à la fin du chapitre, (E, \leq) sera un ensemble ordonné.

Attention! \leq désigne juste une relation d'ordre, et ça n'a rien à voir avec l'ordre usuel \leq qu'on connaît dans \mathbb{R} .

Déf

(E, \leq) étant un ensemble ordonné.

Soient $M \in E$ et $A \subseteq E$.

- 1) On dit que M est un **majorant** de A si et ssi :

$$(\forall x \in A, x \leq M)$$

- 2) On dit que M est un **minorant** de A si et ssi :

$$(\forall x \in A, M \leq x)$$

- 3) A est dite partie **majorée** de E si et ssi :

$$(\exists M \in E, \forall x \in A, x \leq M)$$

4) A est dite partie **minorée** de E si et ssi :

$$(\exists M \in E, \forall x \in A, M \leq x)$$

5) A est dite partie **bornée** de E si et ssi elle est à la fois majorée et minorée.

$$\text{Càd: } \exists (m, M) \in E^2, \forall x \in A, \begin{cases} m \leq x \\ x \leq M \end{cases}$$

Déf

(E, \leq) étant un ensemble ordonné.

Soit $A \subseteq E$.

1) i) Le plus grand élément de A (s'il existe) est l'élément a

vérifiant :

$$\begin{array}{l} a \in A \\ \forall x \in A, x \leq a \end{array}$$

ii) On le note $\max(A)$.

2) i) Le plus petit élément de A (s'il existe) est l'élément b

vérifiant :

$$\begin{array}{l} b \in A \\ \forall x \in A, b \leq x \end{array}$$

ii) On le note $\min(A)$.

Prop

On est dans l'ensemble ordonné (\mathbb{N}, \leq) .

- 1) Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.
- 2) Toute partie non vide majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément.

Autrement dit

1) Si $\begin{cases} A \subset \mathbb{N} \\ A \neq \emptyset \end{cases}$ alors $\min(A)$ existe.

2) Si $\begin{cases} A \subset \mathbb{N} \\ A \neq \emptyset \\ A \text{ majorée} \end{cases}$ alors $\max(A)$ existe.

Fin