

CONCOURS COMMUN SUP 2000

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques (filiale MPSI)

Mardi 23 mai 2000 de 08h00 à 12h00

Extrait

PROBLÈME D'ALGÈBRE

Notations et objectifs :

- Soit n un entier, $n \geq 2$; on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des formes linéaires sur E .
On rappelle que : $\dim(E) = \dim(E^*)$.
Les éléments de E sont notés $M = (m_{ij})$, la matrice élémentaire E_{ij} est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i -ème ligne et sur la j -ème colonne, qui vaut 1.
Lorsque A et B sont des éléments de E , on note $A \cdot B$ leur produit.
Si $M \in E$, on note $\text{vect}(M)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par M .
- L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.
- Si $M = (m_{ij}) \in E$, on note $T(M)$ le réel $\sum_{k=1}^n m_{kk}$.
On définit ainsi une application T de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T(M)$.
A chaque matrice U de E , on associe :
 - L'application T_U de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T_U(M) = T(U \cdot M)$.
 - L'ensemble $H_U = \{ M \in E \mid T(U \cdot M) = 0 \}$.

PARTIE I : Généralités, exemples

1. Quelques propriétés.

- a. Montrer que T est une application linéaire.
- b. Pour $U \in E$, prouver que l'application T_U est dans E^* .
- c. Soit $U \in E$; reconnaître $\text{Ker } T_U$, et montrer que H_U est un sous-espace vectoriel de E .

2. Dans cette question seulement, on prend $n = 2$, et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Ecrire les quatre matrices élémentaires E_{ij} ; que peut-on dire de la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
- b. Montrer que H_U est l'ensemble des matrices de E dont la somme des quatre coefficients vaut 0.
- c. Trouver une matrice M de E telle que $T(U \cdot M) \neq 0$, et en déduire la dimension de $\text{Im } T_U$ puis la dimension de H_U .

d. Montrer que H_U possède une matrice inversible.

La partie III propose une généralisation de ce résultat.

PARTIE II : Quelques résultats utiles pour la suite

1. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ des éléments de E .

a. Montrer que $T(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$.

b. En déduire les identités suivantes :

$$(I_1) \quad T(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

$$(I_2) \quad T(B \cdot A) = T(A \cdot B).$$

2. Soit U dans E .

a. Si U est la matrice nulle, déterminer $\dim H_U$.

b. Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$. En déduire $\dim H_U$.

3. Pour $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on note $T_{ij} = T_{E_{ij}}$.

a. Les indices k et l étant fixés, calculer $T_{ij}(E_{kl})$ en utilisant (I_1) .

b. En déduire que les n^2 éléments T_{ij} de E^* permettent de définir une base de E^* .

4. Montrer que l'application ϕ de E vers E^* : $U \mapsto \phi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. On considère un hyperplan vectoriel H de E .

a. Quelle est sa dimension ?

b. Soit A une matrice non nulle de E qui n'appartient pas à H , montrer que : $E = H \oplus \text{vect}(A)$.

c. Construire alors un élément l de E^* tel que $H = \text{Ker } l$.

d. Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

PARTIE III : Le résultat général

Pour $1 \leq r \leq n$, on note $R_r = \sum_{i=1}^r E_{ii}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $P = (p_{ij})$ avec $\begin{cases} p_{i+1, i} = 1, & 1 \leq i \leq n-1 \\ p_{1n} = 1 \\ p_{ij} = 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$.

a. Montrer que P est inversible.

b. Prouver que P appartient à l'hyperplan H_{R_r} .

2. En déduire que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.

Indication : lorsque $H = H_U$, avec U de rang r , on rappelle l'existence de matrices S_1 et S_2 inversibles telles que $S_1 \cdot U \cdot S_2 = R_r$.

FIN