

# Extrait-Centrale-2021-MP

## MP

### Intégrales dépendant d'un paramètre ...

## II Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

Dans cette partie,

- pour  $k \in \mathbb{N}$ , on dit qu'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si elle est  $k$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $k$ -ième continue sur  $\mathbb{R}$  (si  $k = 0$ ,  $f$  est continue) ; on dit que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  est  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  (respectivement  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $\mathbb{R}$  ;
- on note  $L^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continues et intégrables sur  $\mathbb{R}$  ;
- pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on note  $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  ;
- on note  $L^\infty(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continues et bornées sur  $\mathbb{R}$  ;
- pour  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on note  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .

On admet que  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^\infty(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}^\mathbb{R}$ . On admet également que  $f \mapsto \|f\|_1$  définit une norme sur  $L^1(\mathbb{R})$  et que  $f \mapsto \|f\|_\infty$  définit une norme sur  $L^\infty(\mathbb{R})$ . On dispose ainsi des espaces vectoriels normés  $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$  et  $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

### II.A – Transformée de Fourier d'une fonction

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$  et on note  $\hat{f}$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

**Q 20.** Montrer que, pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 21.** Montrer que l'application  $f \mapsto \hat{f}$  est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé  $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$  dans l'espace vectoriel normé  $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Q 22.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $g(x) = f(\lambda x)$  pour tout réel  $x$ . Montrer que  $g \in L^1(\mathbb{R})$  et, pour tout réel  $\xi$ , exprimer  $\hat{g}(\xi)$  à l'aide de  $\hat{f}$ , de  $\xi$  et de  $\lambda$ .

### II.B – Produit de convolution

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto f(t)g(x-t)$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on appelle produit de convolution de  $f$  et  $g$ , et on note  $f * g$ , la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la sous-partie II.B que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Q 23.** Montrer que  $f * g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = (g * f)(x).$$

**Q 24.** Montrer que  $f * g$  est bornée et que  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ .

**Q 25.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que, si  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et si les fonctions  $g^{(j)}$  sont bornées pour  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , alors  $f * g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)})$ .

**Q 26.** On suppose toujours que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$  et on suppose de plus que  $g \in L^1(\mathbb{R})$  et  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ . En admettant que, pour tout  $\xi$  réel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t) g(x-t) dt \right) dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t) g(x-t) dx \right) dt$$

existent et sont égales, montrer que  $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$ .

### II.C – Introduction d'une fonction plateau

On cherche dans cette sous-partie à construire une fonction réelle positive  $\rho$ , définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $\rho(t) = 1$  pour tout  $t \in [-1, 1]$  et  $\rho(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ .

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ e^{-1/t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Q 27.** Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

On pourra montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \forall t > 0, \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)e^{-1/t}$ .

Soit  $\psi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-1, 1[, \\ e^{1/(t^2-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Q 28.** Montrer, en l'exprimant à l'aide de  $\varphi$ , que  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Q 29.** Soit  $\theta$  l'unique primitive de  $\psi$  s'annulant en 0. Montrer que  $\theta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , constante sur  $]-\infty, -1]$  (on note  $A$  cette constante) et constante sur  $[1, +\infty[$  (on note  $B$  cette constante). Vérifier que  $A \neq B$ .

**Q 30.** Construire alors une fonction  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , constante égale à 1 sur  $[-1, 1]$  et constante égale à 0 sur  $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ .

### II.D – Inégalités de Bernstein

On admet les formules suivantes, dites formules d'inversion de Fourier :

- si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$  ;
- si  $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ , si  $a$  est la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  :  $x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \alpha(\xi) d\xi$ , et si  $a \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\alpha = \hat{a}$ .

On remarque que ces résultats permettent d'affirmer que, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues telles que  $f$ ,  $g$ ,  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  sont intégrables et si  $\hat{f} = \hat{g}$ , alors  $f = g$ .

On considère toujours la fonction  $\rho$  définie à la question 30.

Soit  $r$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que, pour tout réel  $x$ ,

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi.$$

**Q 31.** Montrer que  $r$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donner une expression de sa fonction dérivée (faisant éventuellement intervenir une intégrale).

**Q 32.** Montrer que  $x \mapsto x^2 r(x)$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et en déduire que  $r$  est intégrable et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

On admet qu'en utilisant la même méthode, on montre que  $r'$  est intégrable et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\lambda > 0$  et soit  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  telle que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  et telle que  $\hat{f}$  soit nulle en dehors du segment  $[-\lambda, \lambda]$ . On note  $r_\lambda$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $r_\lambda(x) = r(\lambda x)$  pour tout réel  $x$ .

**Q 33.** On admet que  $f * r_\lambda$  est intégrable. Montrer que  $f = \lambda f * r_\lambda$ .

**Q 34.** En déduire que, si  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ , il existe une constante  $C \in \mathbb{R}_+^*$ , indépendante de  $\lambda$  et de  $f$ , telle que

$$\|f'\|_\infty \leq C\lambda\|f\|_\infty.$$

Fin extrait

