

EPREUVE DES PETITES MINES, 1994

EXTRAIT

Problème I

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x \sin t^2 \, dt$$

1. Prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier sa parité.
2. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ admet une infinité de maximums relatifs (respectivement de minimums relatifs) en des points que l'on peut représenter par une suite strictement croissante $(x_n)_{n \geq 1}$ (respectivement $(y_n)_{n \geq 1}$).

On pose :

$$\forall n \geq 1 \quad a_n = f(x_n) \quad \text{et} \quad b_n = f(y_n)$$

3. Montrer que les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
En déduire que $f(x)$ admet une limite finie l lorsque x tend vers $+\infty$. (On ne cherchera pas à calculer cette limite).

Partie B

On se propose de déterminer une valeur approchée du nombre a_1 défini dans la partie A.

1. Soit g la fonction définie sur $[0, \sqrt{\pi}]$ par :

$$\forall t \in [0, \sqrt{\pi}] \quad g(t) = \sin t^2$$

Déterminer un majorant M_2 de :

$$\{|g''(t)| : t \in [0, \sqrt{\pi}]\}$$

2. Soit k un nombre entier strictement positif. On partage l'intervalle $[0, \sqrt{\pi}]$ en k intervalles de même longueur $\sqrt{\pi}/k$ et l'on pose :

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket \quad \alpha_i = \frac{i\sqrt{\pi}}{k}$$

On a alors :

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t) \, dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t) \, dt$$

On pose, pour tout i de $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\beta_i = (\alpha_i + \alpha_{i+1})/2$ et l'on se propose de prendre comme valeur approchée de $\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t) \, dt$ l'intégrale $I(k)$ telle que $I(k) = \int_0^{\sqrt{\pi}} \varphi(t) \, dt$, où φ est la fonction en escalier telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket & \forall t \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}[& \varphi(t) = g(\beta_i) \\ \varphi(\sqrt{\pi}) = g(\sqrt{\pi}) \end{cases}$$

- (a) Exprimer $I(k)$ en fonction de k et des sommes β_i .
- (b) Justifier, pour tout i de $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$, l'égalité :

$$\forall t \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}[\quad g(t) = g(\beta_i) + g'(\beta_i)(t - \beta_i) + \int_{\beta_i}^t g''(u)(t - u) \, du$$

- (c) En déduire que l'on a :

$$\left| \int_0^{\sqrt{\pi}} g(t) \, dt - I(k) \right| \leq \frac{M_2 \pi \sqrt{\pi}}{24k^2}$$

3.
 - (a) Déterminer alors le plus petit entier k_0 tel que le majorant de l'erreur déterminé précédemment soit inférieur à 10^{-2} .
 - (b) Calculer alors, à 10^{-4} près, la valeur approchée de a_1 obtenue par la méthode précédente.

FIN EXTRAIT

