

ÉPREUVE DES PETITES MINES, 1993

EXTRAIT

Problème I

Les parties **I** et **II** sont indépendantes et dans une large mesure indépendantes de la partie **I**.

Partie I

1. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) \neq 0$. Soit ε une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(1) = 0$. Pour tout entier naturel n , on note

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) \, dt \quad \left(I_0 = \int_0^1 f(t) \, dt \right)$$

Pour tout entier non nul n on note :

$$J_n = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} t^n f(t) \, dt \quad K_n = \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n f(t) \, dt \quad \text{et} \quad \theta_n = n \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 t^n \varepsilon(t) \, dt$$

- (a) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
(b) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = 0$.
(c) i. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$.

On pourra utiliser

$$\alpha_n = \sup \left\{ |\varepsilon(t)| : t \in \left[1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 1 \right] \right\}$$

- ii. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nK_n = K$ où K est un réel non nul que l'on précisera.
(d) Déduire des questions précédentes un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$.
2. Soit f une fonction dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ dont la fonction dérivée est continue, telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$. Pour tout entier naturel n on note

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) \, dt \quad \left(I_0 = \int_0^1 f(t) \, dt \right)$$

Déterminer un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$ de la forme A/n^2 , A étant un réel non nul que l'on précisera.

Partie II

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n , on note

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) \, dt \quad \left(I_0 = \int_0^1 f(t) \, dt \right)$$

1. On suppose

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Pour tout entier naturel p , on note :

$$u_p = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} \quad \text{et} \quad v_p = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

- (a) i. Calculer I_0 et I_1 .
ii. Établir pour tout entier naturel n une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
(b) i. Démontrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = u$ où u est un réel que l'on précisera.
ii. Donner un équivalent de $(u - u_p)$ au voisinage de $+\infty$.
(c) i. Démontrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = v$ où v est un réel que l'on précisera.
ii. Donner un équivalent de $(v - v_p)$ au voisinage de $+\infty$.

2. On suppose

$$f(t) = \sin(\pi t)$$

Pour tout entier naturel p , on note

$$a_p = (-1)^p \frac{\pi^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad t_p = a_p I_{2p}$$

Pour tout entier naturel non nul p on note :

$$w_p = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \frac{\pi^{2k-1}}{(2k)!}$$

- (a) Établir pour tout entier naturel n une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
(b) i. Pour tout entier naturel non nul k exprimer $t_k - t_{k-1}$ en fonction de a_k .

ii. Pour tout entier naturel non nul p exprimer t_p en fonction de I_0 et w_p .

(c) Dédurre de la question précédente que $\lim_{p \rightarrow +\infty} w_p = w$ où w est un réel que l'on précisera.

On admettra le résultat suivant :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} a_p = 0$$

Partie III

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x de $[0, 1[$ et pour tout entier naturel n on note :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n f(t) \, dt \quad \left(I_0 = \int_0^x f(t) \, dt \right) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n I_k(x)$$

1. Démontrer que pour tout réel x de $[0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = 0$.
2. Démontrer que pour tout réel x de $[0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$ où $F(x)$ est un réel que l'on exprimera sous forme d'une intégrale faisant intervenir f .

3. Applications :

(a) On suppose

$$f(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Calculer $F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} F(x)$.

(b) On suppose

$$f(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

f est-elle dérivable en 1 ? Calculer $F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} F(x)$.

(c) On suppose

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\ln(1-t)} & \text{si } t \neq 1 \\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Justifier la continuité de f sur $[0, 1]$. f est-elle dérivable en 1 ?

Calculer $F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} F(x)$.

FIN EXTRAIT

