# $\sum$, $\prod$, $C_n^k$ et Binôme de Newton

**Exercice 1 :**

Simplifier les expressions suivantes :

**1)** $\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n} k$ **2)** $\sum_{k=2}^{n+2} k - \sum_{i=0}^{n} i$ **3)** $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-2)(k-1)$ **4)** $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$

**5)** $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ **6)** $\prod_{k=1}^{n} (2k)$ **7)** $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ **8)** $\sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{1}{k})$

**9)** $\sum_{k=1}^{n} k2^k$ **10)** $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ **11)** $\prod_{k=2}^{n} (1-\frac{1}{k^2})$ **12)** $\prod_{k=1}^{n} (6k-3)$

**Exercice 2 :**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$, 2) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^{k-1}$, 3) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{1-k}$,

4) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} 2^{2k}$, 5) $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$, 6) $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$

**Exercice 3 :**

1) Via la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^n$.

2) En déduire des simplifications des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k, \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k, \ \sum_{k=0}^{n} kC_n^k, \ \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$$

**Exercice 4 :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

1) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = \frac{n}{2n+1}$$

2) Recalculer cette somme par télescopie.

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2 \geq 2n+3$$

**Exercice 5 :** (Extrait de CONCOURS)
Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Notons pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $B_{n,k} = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

1) a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$

b) En déduire que $0 \leq B_{n,k} \leq 1$

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$ , $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$ , puis $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$

3) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}$

**Exercice 6 :**
Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1) Montrer que

$$\forall k \in \{2, ..., n\}, \ \frac{1}{k!} \preceq \frac{1}{2^{k-1}}$$

2) En déduire que

$$\forall k \in \{2, ..., n\}, \ \frac{C_n^k}{n^k} \preceq \frac{1}{2^{k-1}}$$

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \preceq 3$$

**Exercice 7 :**

En utilisant les valeurs des sommes classiques $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$, calculer les sommes suivantes :

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

2) $T_n = 1.n + 2.(n-1) + ... + (n-1).2 + n.1$

**Exercice 8 :**

1) Soit x un réel différent de 1. Simplifier $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

2) Que vaut cette somme quand $x = 1$ ?

**Exercice 9 :**
Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

**Exercice 10 :**
Considérons la suite $(u_n)_{n\succeq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

1) Montrer la suite $(u_n)_{n\succeq 1}$ est bornée.

2) Montrer la suite $(u_n)_{n\succeq 1}$ est strictement croissante.

**Exercice 11 :**
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k! \preceq (n+1)!$$

**Exercice 12 :**

1) Soient $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$

**Exercice 13 :**

Soit $q$ un complexe différent de 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k$.

1) Calculer $qS_n - S_n$.

2) En déduire la valeur de $S_n$.

**Exercice 14 :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a$ et $b$ deux réels vérifiant $0 \prec a \prec b$. Montrer que

$$na^{n-1} \preceq \frac{b^n - a^n}{b-a} \preceq nb^{n-1}$$

**Exercice 15 :**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} C_n^k sin(k\theta)$.

2) $\sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.

3) $\sum_{k=0}^{n} kcos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} ksin(k\theta)$.

**Exercice 16 :**

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^+,\ \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \succeq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

2) Montrer l'inégalité de Bernouli :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1+nx \preceq (1+x)^n$$

via les méthodes suivantes :

a) Déduisez-la de 1).

b) Par récurrence.

c) Via la formule du binôme Newton.

d) Via l'égalité de Bernouli.

**Exercice 17 :**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $P = \prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$.

1) Que vaut $P$ si $a = 1$ ?

2) Supposons maintenant que $a \neq 1$.

i) Calculer $(1-a)P$.

ii) En déduire la valeur de $P$.

**Exercice 18 :**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $P(x) = \prod_{k=0}^{n} cos(2^k x)$.

1) Supposons que $x = 0\ [\pi]$. Calculer $P(x)$.

2) Supposons maintenant que $x \neq 0\ [\pi]$.

a) Simplifier $sin(x)P(x)$.

b) En déduire alors P(x)

**Exercice 19 :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$

2) En déduire que $\sqrt{n} \preceq \sqrt[n]{n!} \preceq \frac{n+1}{2}$

**Exercice 20 :**

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$$

2) Posons $T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.
   Prouver que $U_n = S_n + T_n$.

3) Calculer $T_n$ et $U_n$.

4) Retrouver alors l'expression de $S_n$ donnée dans 1).