

CONCOURS COMMUN 2007

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

Premier problème

I. Etude d'une fonction

CORRECTION

1. • **Etude en 0 à droite.** D'après les théorèmes de croissance comparées

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue à droite en 0. Ensuite,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0.$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

f est continue et dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

• **Etude en 0 à gauche.** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$ et f n'est pas continue à gauche en 0.

Donc f est continue à droite en 0.

2. • **Limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.** Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\frac{1}{x^2}$ tend 0 et $e^{-\frac{1}{x}}$ tend vers 1. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que la droite (Ox) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

• **Dérivée et variations de f .** f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions dérivables et pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) = \frac{-2x + 1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Le signe de f' est clair et on peut dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	1/2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0
f	0	$+\infty$	$4e^{-2}$	0

3. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$

$$f''(x) = \left(\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}} \right)'(x) = \left(\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^5} \right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{-2x + 1}{x^6} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{6x^2 - 6x + 1}{x^6} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Sur $\mathbb{R}^*$, f'' est du signe de $6x^2 - 6x + 1$. Ce trinôme admet deux racines distinctes à savoir les réels $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$. Par suite f'' s'annule en changeant de signe en x_1 et x_2 et la courbe ($\mathcal{C}$) admet deux points d'inflexion, les points d'abscisses x_1 et x_2 . De plus f'' est strictement positive sur $] -\infty, 0[$, sur $]0, x_1[$ et sur $]x_2, +\infty[$ et strictement négative sur $]x_1, x_2[$. Donc

$$f \text{ est convexe sur }]-\infty, 0[, \text{ sur } \left]0, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right] \text{ et sur } \left[\frac{3+\sqrt{3}}{6}, +\infty\right[\text{ et concave sur } \left[\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right].$$

4. **Graphes de f .** Voir page suivante.

II. Calcul d'aires

5. Soit $h \in]0, 1[$. Puisque f est continue et positive sur $[h, 1]$,

$$\mathcal{A}(h) = \int_h^1 f(x) \, dx = \int_h^1 \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \, dx = \left[e^{-1/x} \right]_h^1 = e^{-1} - e^{-1/h} \text{ unités d'aires.}$$

$$\forall h \in]0, 1[, \mathcal{A}(h) = e^{-1} - e^{-1/h} \text{ unités d'aires ou aussi } \mathcal{A}(h) = 4(e^{-1} - e^{-1/h}) \text{ cm}^2.$$

6. Quand h tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(h) = e^{-1} \text{ unités d'aires.}$$

III. Résolution d'une équation différentielle

7. Soit I l'un des deux intervalles $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Sur I l'équation (E) s'écrit encore $y' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)y = 0$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ est continue sur I , on sait que les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 1. De plus, pour $x \in I$,

$$x^2 f'(x) + (2x - 1)f(x) = \frac{-2x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2x - 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Ainsi, la fonction f est une solution non nulle de (E) sur I et donc

$$\text{les solutions de (E) sur }]-\infty, 0[\text{ ou sur }]0, +\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } Cf \text{ où } C \text{ est un réel.}$$

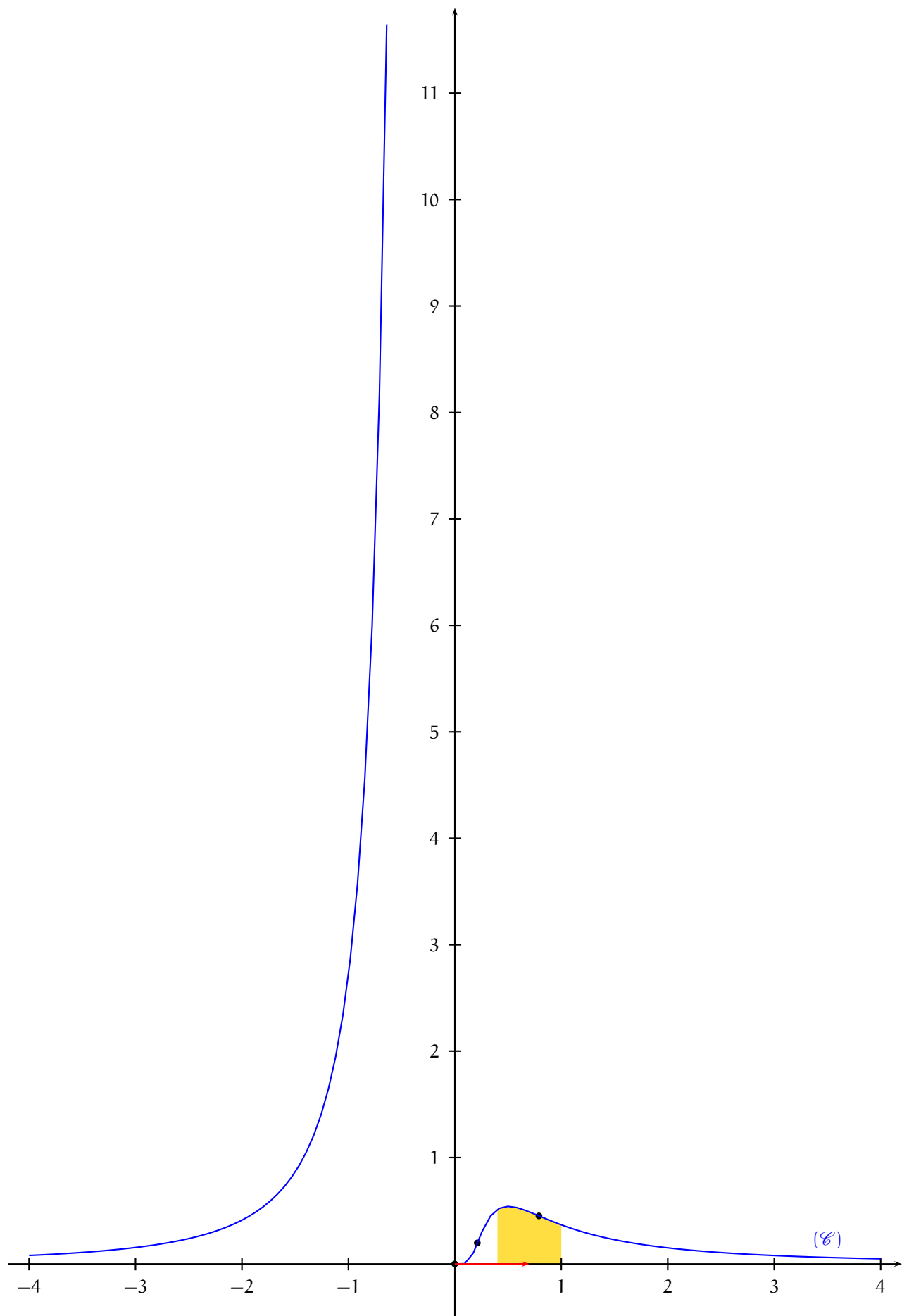
Si on n'a pas constaté que f est solution de (E) sur I , on doit résoudre directement :

Soit g une fonction dérivable sur I .

$$\begin{aligned} g \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, g'(x) + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \exp\left(2 \ln|x| + \frac{1}{x}\right) g'(x) + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \exp\left(2 \ln|x| + \frac{1}{x}\right) g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, (\exp\left(2 \ln|x| + \frac{1}{x}\right) g)'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, (x^2 e^{\frac{1}{x}} g)'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}; \forall x \in I, x^2 e^{\frac{1}{x}} g(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}; \forall x \in I, g(x) = C \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

8. On note que la fonction nulle est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Soit g une solution quelconque de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement les restrictions de g à $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ sont solutions de (E) sur ces intervalles et d'autre part nécessairement $g(0) = 0$. Ainsi, si g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe nécessairement $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} C_1 f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C_1 f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} C_1 f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (\text{aller à la page 4}).$$



Réciproquement une telle fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0. D'après la question 1., g est dérivable en 0 à gauche si et seulement si $C_2 = 0$ et dans ce cas, $g'_g(0) = 0$. D'autre part g est dérivable à droite en 0 pour tout choix de C_1 et de plus $g'_d(0) = 0$. Enfin pour $C_2 = 0$ et C_1 quelconque, g est dérivable à gauche et à droite en 0 avec $g'_g(0) = g'_d(0) = 0$ ce qui montre que g est dérivable en 0 et donc solution sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \begin{cases} Cf(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $C \in \mathbb{R}$ ou encore les fonctions de la forme $Cf\chi_{[0, +\infty[}$ où $\chi_{[0, +\infty[}$ est la fonction caractéristique de $[0, +\infty[$.

IV. Dérivées successives et polynômes associés

9. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $]0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto e^y$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Mais alors la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

10. Montrons le résultat par récurrence.

- Si $n = 0$, on a pour $x > 0$ $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{P_0(x)}{x^{2 \times 0 + 2}}e^{-\frac{1}{x}}$ où $\forall x > 0$, $P_0(x) = 1$ et le résultat est vrai si $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}}$. Alors

$$f^{(n+1)}(x) = P'_n(x) \times \frac{1}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}} - \frac{(2n+2)}{x^{2n+3}}P_n(x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+4}}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2P'_n(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)}{x^{2n+4}}e^{-\frac{1}{x}}.$$

Pour $x > 0$, posons $P_{n+1}(x) = x^2P'_n(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)$ (1). Alors P_{n+1} est un polynôme tel que pour tout réel $x > 0$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)+2}}e^{-\frac{1}{x}}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

On note que la suite des polynômes P_n est uniquement définie par récurrence car $]0, +\infty[$ est un ensemble infini.

11. $P_0 = 1$. D'après les résultats des questions 2. et 3., $P_1 = -2X + 1$ et $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$. Ensuite

$$P_3 = X^2P'_2 + (1-6X)P_2 = X^2(12X-6) + (1-6X)(6X^2-6X+1) = -24X^3 + 36X^2 - 12X + 1,$$

et enfin

$$\begin{aligned} P_4 &= X^2P'_3 + (1-8X)P_3 = X^2(-72X^2 + 72X - 12) + (1-8X)(-24X^3 + 36X^2 - 12X + 1) \\ &= 120X^4 - 240X^3 + 120X^2 - 20X + 1, \end{aligned}$$

$$P_0 = 1, P_1 = 1 - 2X, P_2 = 6X^2 - 6X + 1, P_3 = -24X^3 + 36X^2 - 12X + 1 \text{ et } P_4 = 120X^4 - 240X^3 + 120X^2 - 20X + 1.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. En évaluant en 0 les deux membres de l'égalité (1), on obtient $P_{n+1}(0) = P_n(0)$. Par suite, la suite $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = P_0(0) = 1$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$ et $\text{dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$.

- Puisque $P_1 = -2X + 1$, le résultat est vrai quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\deg(P_n) = n$ et $\text{dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$. Alors $\deg(P'_n) = n-1$ (car $n \geq 1$) et donc $\deg(X^2P'_n) = n+1$. D'autre part, $\deg((1-2(n+1)X)P_n) = \deg XP_n = n+1$. Ceci montre déjà que $\deg(P_{n+1}) \leq n+1$. De plus le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} vaut :

$$n\text{dom}(P_n) - 2(n+1)\text{dom}(P_n) = -(n+2)\text{dom}(P_n) = -(n+2) \times (-1)^n(n+1)! = (-1)^{n+1}(n+2)!,$$

ce qui démontre le résultat par récurrence

Le résultat restant valable pour $n = 0$, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n, \text{dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)! \text{ et } P_n(0) = 1.$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x > 0$,

$$g^{(n+1)}(x) = (\exp(-1/x))^{(n+1)}(x) = ((\exp(-1/x))')^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x^2} \exp(-1/x)\right)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x).$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n+1)} = f^{(n)}.$$

14. Formule de LEIBNIZ. Soient n un entier naturel non nul puis f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

15. Soit n un entier naturel non nul. Alors $n+1 \geq 2$ et pour $x > 0$, on a d'après la formule de LEIBNIZ

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= x^2 f^{(n+1)}(x) + (n+1) \times 2x f^{(n)}(x) + \frac{(n+1)n}{2} \times 2f^{(n-1)}(x) \\ &= x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)x f^{(n)}(x) + n(n+1)f^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} = f^{(n)} &\Rightarrow \forall x > 0, x^2 \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} e^{-\frac{1}{x}} + 2(n+1)x \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} + n(n+1) \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} \\ &\Rightarrow \forall x > 0, P_{n+1}(x) + 2(n+1)x P_n(x) + n(n+1)x^2 P_{n-1}(x) = P_n(x) \\ &\Rightarrow \forall x > 0, P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x)P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x)P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x) \quad (2).$$

16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. Les égalités (1) et (2) fournissent

$$x^2 P'_n(x) + (1 - 2(n+1)x)P_n(x) = (1 - 2(n+1)x)P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x),$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, P'_n(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x).$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant l'égalité (1) et en tenant compte de l'égalité $P'_{n+1} = -(n+2)(n+1)P_n$, on obtient pour $x > 0$

$$-(n+2)(n+1)P_n(x) = 2xP'_n(x) + x^2 P''_n(x) - 2(n+1)P_n(x) + (1 - 2(n+1)x)P'_n(x),$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, x^2 P''_n(x) + (1 - 2nx)P'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

FIN

