# Correction

1.a Puisque $E$ est de dimension finie, si $u$ est injectif alors $u$ est un automorphisme et par suite $u^p$ aussi. Il en découle $N_p = \{\vec{o}\}$ et $I_p = E$.

1.b Noyau et image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.

1.c Soit $\vec{x} \in N_p$. On a $u^{p+1}(\vec{x}) = u(u^p(\vec{x})) = u(\vec{o}) = \vec{o}$ donc $\vec{x} \in N_{p+1}$.

Soit $\vec{y} \in I_{p+1}$. Il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u^{p+1}(\vec{x})$. Pour $\vec{a} = u(\vec{x}) \in E$ on a alors $u^p(\vec{a}) = u^{p+1}(\vec{x}) = \vec{y}$ et donc $\vec{y} \in I_p$.

2.a $u^p$ est un endomorphisme donc par le théorème du rang : $\dim\ker u^p + \dim \operatorname{Im} u^p = \dim E$ i.e. $n_p + i_p = n$.

2.b $N_p \subset N_{p+1}$ implique $n_p \le n_{p+1}$ donc la suite $(n_p)$ est croissante.
Comme il s'agit d'une suite d'entiers naturels croissante et majorée par $n$, celle-ci est nécessairement constante à partir d'un certain rang. Soit $A = \{p \in \mathbb{N} \mid n_{p+1} = n_p\}$.

$A$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc elle possède un plus petit élément $r$.

2.c Par l'absurde, si $r > n$ alors $\forall 0 \le p \le n+1$, $n_{p+1} \ne n_p$ d'où $n_{p+1} \ge n_p + 1$.

Par suite : $n_{n+1} \ge n_n + 1 \ge n_{n-1} + 2 \ge \ldots \ge n_0 + n + 1 = n + 1$.

Or $n_{n+1} = \dim\ker u^{p+1} \le \dim E = n$. Absurde.

3.a $N_r \subset N_{r+1}$ et $\dim N_r = n_r = n_{r+1} = \dim N_{r+1}$ donc $N_r = N_{r+1}$

$I_r \subset I_{r+1}$ et $\dim I_r = i_r = n - n_r = n - n_{r+1} = i_{r+1} = \dim I_{r+1}$ donc $I_r = I_{r+1}$.

3.b Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, montrons $N_{r+p} = N_r$.
Pour $p = 0$, facile.
Supposons la propriété établie au rang $p \ge 0$.
On sait $N_{r+p} \subset N_{r+p+1}$.

Soit $\vec{x} \in N_{r+p+1}$, on a $u^{r+p+1}(\vec{x}) = \vec{o}$ donc $u^p(\vec{x}) \in N_{r+1}$. Or $N_{r+1} = N_r$ donc $u^p(\vec{x}) \in N_p$ puis $u^{r+p}(\vec{x}) = \vec{o}$ et enfin $\vec{x} \in N_{r+p}$. Ainsi $N_{r+p+1} \subset N_{r+p}$ puis $N_{r+p+1} = N_{r+p} \underset{HR}{=} N_r$.

Récurrence établie.
On sait $I_{r+p} \subset I_r$ et $\dim I_{r+p} = i_{r+p} = n - n_{n+p} = n - n_r = i_r = \dim I_r$ donc $I_{r+p} = I_r$.

3.c Soit $\vec{x} \in N_r \cap I_r$.

Il existe $\vec{a} \in E$ tel que $\vec{x} = u^r(\vec{a})$.

$u^r(\vec{x}) = \vec{o}$ donne alors $u^{2r}(\vec{a}) = \vec{o}$ d'où $\vec{a} \in N_{2r} = N_{r+r} = N_r$ donc $\vec{x} = u^r(\vec{a}) = \vec{o}$.

Ainsi $N_r \cap I_r = \{\vec{o}\}$.

De plus, par le théorème du rang : $\dim N_r + \dim I_r = \dim E$ donc $N_r \oplus I_r = E$.

4.a $I_{p+1}$ est un sous-espace vectoriel de $I_p$, or, en dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire. $D_p$ supplémentaire de $I_{p+1}$ dans $I_p$ existe et convient.

$I_p = I_{p+1} \oplus D_p$ donne $i_p = i_{p+1} + \dim D_p$ d'où $\dim D_p = i_p - i_{p+1} = \delta_p$.

4.b $I_{p+1} = u(I_p) = u(I_{p+1} \oplus D_p) = u(I_{p+1}) + u(D_p) = I_{p+2} + u(D_p)$ car pour $F$ et $G$ sous-espaces vectoriels de $E$ on a $u(F+G) = u(F) + u(G)$.

4.c Par l'égalité précédente $\dim I_{p+1} \le \dim I_{p+2} + \dim u(D_p) \le \dim I_{p+2} + \dim D_p$ car $\dim u(D_p) \le \dim D_p$.
Par suite $\dim D_p \ge \dim I_{p+1} - \dim I_{p+2}$ ce qui donne $\delta_p \ge \delta_{p+1}$.