E désigne un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathscr{L}(E)$ l 'algèbre des endomorphismes de E. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $\mathscr{C}(f)$ l'ensemble des endomorpbismes de E qui commutent avec f : $\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) / fg = gf\}$.

1.1 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1.1.1 Montrer que, pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, il existe un unique λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Sol : Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

i) Existence de $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$

$(x, f(x))$ liée $\Rightarrow \begin{cases} \exists\, a, b \in \mathbb{K},\ ax + bf(x) = 0 \\ \text{où } a \text{ et } b \text{ non tous nuls} \end{cases}$

On a $b \neq 0$, car sinon on aurait $ax = 0$ et donc $(a = 0$ et $b = 0)$; (car $x \neq 0$)

Ce qui contredit le fait que a et b non tous nuls.

On a $b \neq 0$, alors $\boxed{f(x) = -\frac{a}{b} \cdot x}$ $\left(\lambda_x = -\frac{a}{b}\right)$

ii) Unicité de λ_x :

Supposons l'existence de λ_x et $\lambda'_x \in \mathbb{K}$ tels que $\begin{cases} f(x) = \lambda_x \cdot x \\ f(x) = \lambda'_x \cdot x \end{cases}$.

Mq que $\lambda_x = \lambda'_x$:

On a $\lambda_x \cdot x = \lambda'_x \cdot x$

$\Rightarrow (\lambda_x - \lambda'_x) \cdot x = 0$

$\Rightarrow \lambda_x - \lambda'_x = 0$ car $x \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_x = \lambda'_x}$ ∎

1.1.2 Soit (e_1, e_2) une base de E ; montrer que $\boxed{\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}}$.

Sol :

On a $\begin{cases} f(e_1) = \lambda_{e_1} \cdot e_1 \\ f(e_2) = \lambda_{e_2} \cdot e_2 \end{cases}$

et on a $f(e_1+e_2) = \lambda_{e_1+e_2} \cdot (e_1+e_2)$

D'où $f(e_1) + f(e_2) = \lambda_{e_1+e_2} \cdot e_1 + \lambda_{e_1+e_2} \cdot e_2$

$\Rightarrow \lambda_{e_1} \cdot e_1 + \lambda_{e_2} e_2 = \lambda_{e_1+e_2} \cdot e_1 + \lambda_{e_1+e_2} \cdot e_2$

$\Rightarrow (\lambda_{e_1} - \lambda_{e_1+e_2}) e_1 + (\lambda_{e_2} - \lambda_{e_1+e_2}) e_2 = 0$

Or (e_1, e_2) libre (car base de E).

D'où $\begin{cases} \lambda_{e_1} - \lambda_{e_1+e_2} = 0 \\ \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1+e_2} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}} = \lambda_{e_1+e_2}$

1.1.3 On pose $\lambda = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$. Montrer que $f = \lambda id_E$ (homothétie de rapport λ).

Sol : Soit $x \in E$. M que $f(x) = \lambda . x$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $x = \alpha e_1 + \beta e_2$.

On a $f(x) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2)$

$= \alpha \lambda e_1 + \beta \lambda e_2$ (car $\lambda = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$)

$= \lambda(\alpha e_1 + \beta e_2)$

$= \lambda x$

Piste 2 : On montre que f et $(\lambda\, id_E)$ coincident en e_1 et en e_2

On a $\begin{cases} f(e_1) = \lambda_{e_1} . e_1 = \lambda e_1 \\ (\lambda\, id_E)(e_1) = \lambda e_1 \end{cases}$

Idem pour e_2

1.2 Soit f un endomorphisme de E.

1.2.1 Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Sol : $g \in \mathscr{C}(f) \iff gf = fg$

i) $0 \in \mathscr{C}(f)$, car $f \cdot 0 = 0 \cdot f = 0$

ii) Soient $g_1, g_2 \in \mathscr{C}(f)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

M que $(\alpha g_1 + g_2) \in \mathscr{C}(f)$:

C.à.d que $(\alpha g_1 + g_2) f = f(\alpha g_1 + g_2)$:

On a :

$$(\alpha g_1 + g_2) f = \alpha g_1 f + g_2 f$$

$$= \alpha f g_1 + f g_2, \text{ car } g_1 \text{ et } g_2 \in \mathscr{C}(f)$$

$$= f(\alpha g_1 + g_2)$$

Enfin $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(E)$.

1.2.2 Déterminer $\mathscr{C}(f)$ si f est une homothétie.

Sol :

Supp que f est une homothétie.

Alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f = \alpha . id_E$.

$$\mathscr{C}(f) = \{ g \in \mathcal{L}(E) \,/\, g \circ (\alpha . id_E) = (\alpha . id_E) \circ g \}$$

Or $(\forall g \in \mathcal{L}(E)), \; g \circ (\alpha id_E) = (\alpha id_E) \circ g = g)$

Alors :

$$\mathscr{C}(f) = \mathcal{L}(E)$$

1.3 Soit f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

1.3.1 Justifier qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit une base de E.

Sol :

D'après (1.1), on a :

$(\forall x \in E, (x, f(x))$ liée$) \Rightarrow (f$ est une homothétie$)$

On a f n'est une homothétie, alors par contraposé :

$(\exists x \in E, (x, f(x))$ n'est pas liée$)$

$\Rightarrow \exists x \in E, (x, f(x))$ est libre.

or $\dim(E) = \text{card}(x, f(x))$ $(=2)$

alors $(x, f(x))$ est une base de E.

1.3.2 Si $g \in \mathscr{L}(E)$, justifier qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $g(e) = \alpha e + \beta f(e)$ et montrer que $g \in \mathscr{C}(f)$ si et seulement si, $g = \alpha id_E + \beta f$.

Sol :

i)

On a $\begin{cases} (e, f(e)) \text{ base de } E \\ g(e) \in E \end{cases}$

D'où $\left(\exists ! (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \ g(e) = \alpha e + \beta f(e) \right)$

ii) $g \in \mathscr{C}(f) \iff g = \alpha id_E + \beta f$; En effet :

($\Leftarrow$) Supp que $g = \alpha id_E + \beta f$.

On a $gf = \alpha f + \beta f^2 = f(\alpha id_E + \beta f) = fg$

D'où $g \in \mathscr{C}(f)$

($\Rightarrow$) Supp que $g \in \mathscr{C}(f)$.

Pour m que $g = \alpha id_E + \beta f$, il suffit de montrer que $\begin{cases} g(e) = (\alpha id_E + \beta f)(e) \\ g(f(e)) = (\alpha id_E + \beta f)(f(e)) \end{cases}$

Car $(e, f(e))$ est une base de E.

Pour $g(e) = (\alpha id_E + \beta f)(e)$: Clair

$g(f(e)) = f(g(e))$ (car $fg = gf$)

$= f(\alpha e + \beta f(e))$

$= \alpha f(e) + \beta f^2(e)$

$= (\alpha\, id_E + \beta f)(f(e))$

1.3.3 Préciser $\mathscr{C}(f)$; quelle est sa dimension ?

a) $\mathscr{C}(f) = \text{vect}(id_E, f)$; en effet :

" $\subset$ " : Soit $g \in \mathscr{C}(f)$.

D'après 1)3)2), $g = \alpha\, id_E + \beta f$

$\Rightarrow g \in \text{vect}(id_E, f)$

" $\supset$ " Il suffit de vérifier que $id_E \in \mathscr{C}(f)$ et $f \in \mathscr{C}(f)$.

Ce qui est vrai car :

$$\begin{cases} id_E \circ f = f \circ id_E \;(= f) \\ \text{et} \quad f \circ f = f \circ f \end{cases}$$

b) $\dim(\mathscr{C}(f)) = ?$

On a $\mathscr{C}(f) = \text{vect}(id_E, f)$ donc (id_E, f) est une famille génératrice de $\mathscr{C}(f)$.

D'autre part, (id_E, f) est libre, car f n'est pas une homothétie, et donc f n'est pas colinéaire avec id_E.

Ainsi (id_E, f) est une base de $\mathscr{C}(f)$.

$\Rightarrow \dim(\mathscr{C}(f)) = 2$

1.4 **Traduction matricielle** : Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$; on pose $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) / AM = MA\}$.

1.4.1 Si A est une matrice scalaire, déterminer $\mathscr{C}(A)$.

Supp que A est une matrice scalaire.

C.à.d : $(\exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda . I_2)$

On sait que (λI_2) commute avec toutes les matrices de $M_2(\mathbb{K})$

d'où $\mathscr{C}(A) = M_2(\mathbb{K})$

1.4.2 Si A n'est pas une matrice scalaires, montrer que $\mathscr{C}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$; quelle est sa dimension ?

i) Supp que A n'est pas scalaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

$A = \underset{B_c}{\mathrm{mat}}(f)$; où B_c la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

f n'est pas une homothétie de $\mathbb{K}^2$, car A n'est pas scalaire.

D'après (1.3) $\mathscr{C}(f) = \mathrm{vect}(id_{\mathbb{K}^2}, f)$.

Soit $B \in M_2(\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ l'end can associé à B. On a :

$$\begin{aligned}
B \in \mathscr{C}(A) &\iff AB = BA \\
&\iff fg = gf \\
&\iff g \in \mathscr{C}(f) \\
&\iff (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ g = \alpha\, id_{\mathbb{K}^2} + \beta f) \\
&\iff (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ B = \alpha I_2 + \beta A) \\
&\iff B \in \mathrm{vect}(I_2, A)
\end{aligned}$$

Enfin : $\mathscr{C}(A) = \mathrm{vect}(I_2, A)$

ii) $\dim(\mathcal{C}(A)) = ?$

Pareil à dans (1.3.3).

Voyons une autre piste.

$$\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathrm{Vect}(I_2, A))$$
$$= \mathrm{rg}(I_2, A)$$
$$= 2$$

Car (I_2, A) libre, du fait que A n'est pas scalaire, et donc non colinéaire avec I_2

Fin