Séries entières

Exercice 1:

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

b) $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n$

c) $\displaystyle\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

e) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

f) $\displaystyle\sum \sin(\mathrm{e}^{-n}) x^n$

g) $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

h) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

i) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

j) $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$

k) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

Exercice 2:

Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

b) Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.

c) Établir la continuité de f en -1.

d) Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 3:

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$$

Exercice 4:

Former le développement en série entière de

$$\frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2}$$

pour $|z| < 1$ et $t \in]0\,;\pi[$.

Exercice 5:

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Former le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{p+1}}$$

Exercice 6:

Établir que pour tout $x \in]-1\,;1[$ et $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} x^n$$

Exercice 7:

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Exercice 8:

Soient $p \in \mathbb{N}$ et
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.

b) Calculer $f(x)$ en étudiant $(1-x)f'(x)$.

Exercice 9:

Soit f définie sur $]-1\,;1[$ par
$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$.

Exercice 10:

Soit
$$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

a) Déterminer l'intervalle de convergence de f.

b) Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $]-1\,;1[$

Exercice 11:

Rayon de convergence et somme de

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$ 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$

Exercice 12:

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$

Exercice 13:

Montrer

1) $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

2) $$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice 14:

Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 15:

Trouver une solution particulière non nulle sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (qu'on ne résoudra pas totalement) :

$$x^2y'' + x(1+x)y' - y = 0$$

On la cherchera sous forme d'une série entière avant de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 16:

1. Trouver la solution f de l'équation différentièlle : $y' - 2xy = 1$ vérifiant $f(0) = 0$.
2. Développer f en série entière à l'origine .
3. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.