CORRIGÉ : MATH 2 ; MP ; Mines-ponts_2011

A. Préliminaire

1) On pose : $j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$; $j^3 = 1$; $j^4 + j^2 + 1 = j^2 + j + 1 = 0$.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + \lambda^2 + 1.$$

$\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 - j)(\lambda^2 - j^2) = (\lambda^2 - j^4)(\lambda^2 - j^2) = (\lambda - j)(\lambda + j)(\lambda - j^2)(\lambda + j^2)$.

Le polynôme $\chi_A(\lambda)$ est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.

a) Cherchons le sous espace propre $E_j(A)$ associé à la valeur propre j :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = j\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = jx \\ z = jy \\ t = jz \\ -x - z = jt \end{cases} ; \ E_j(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice réelle et $j = \overline{j^2}$ alors $E_{j^2}(A) = \mathbb{C}\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Cherchons le sous espace propre $E_{-j}(A)$ associé à la valeur propre $-j$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -j\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -jx \\ z = -jy \\ t = -jz \\ -x - z = -jt \end{cases} ; \ E_{-j}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j^2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice réelle et $\overline{-j} = -j^2$ alors $E_{-j^2}(A) = \mathbb{C}\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j^2 \\ -1 \end{pmatrix}} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \\ j \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'où la matrice inversible : $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & j^2 & -j & -j^2 \\ j^2 & j & j^2 & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice diagonale

$D = diag(j, j^2, -j, -j^2)$ qui vérifient la relation : $U^{-1}AU = D$.

3) Posons : $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \\ k(t) \end{pmatrix}$ et l'équation différentielle : $X' = AX$ (1).

(1) $\Leftrightarrow X' = UDU^{-1}X \Leftrightarrow Z' = DZ$ (avec $Z = U^{-1}X)$). Posons : $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$.

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u' = ju \\ v' = j^2 v \\ w' = -jw \\ \theta' = -j^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = \alpha \exp(jt) \\ v(t) = \beta \exp(j^2 t) \\ w(t) = \gamma \exp(-jt) \\ \theta(t) = \delta \exp(-j^2 t) \end{cases}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes complexes arbitraires.

La solution générale de (1) est : $X(t) = \begin{pmatrix} \alpha \exp(jt) + \beta \exp(j^2 t) + \gamma \exp(-jt) + \delta \exp(-j^2 t) \\ j(\alpha \exp(jt) + \beta j \exp(j^2 t) - \gamma \exp(-jt) - \delta j \exp(-j^2 t)) \\ j(\alpha j \exp(jt) + \beta \exp(j^2 t) + \gamma j \exp(-jt) + \delta \exp(-j^2 t)) \\ \alpha \exp(jt) + \beta \exp(j^2 t) - \gamma \exp(-jt) - \delta \exp(-j^2 t) \end{pmatrix}$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes complexes arbitraires.

4) Posons : $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$; $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \\ y^{(4)} \end{pmatrix}$. et l'équation : (2) $y^{(4)} + y'' + y = 0$.

y est solution de (2) si et seulement si $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \\ y^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \\ -y - y'' \end{pmatrix} = AY$.

y est solution de (2) si et seulement si Y est solution de (1).
Alors la solution générale de (2) est $y(t) = \alpha \exp(jt) + \beta \exp(j^2 t) + \gamma \exp(-jt) + \delta \exp(-j^2 t)$
avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes complexes arbitraires.

$([t \mapsto \exp(jt)], [t \mapsto \exp(j^2 t)], [t \mapsto \exp(-jt)], [t \mapsto \exp(-j^2 t)])$ est une base de l'ensemble des solutions complexes de (2).

Par passage aux parties réelles et imaginaires de ces solutions , on déduit que les solutions réelles de (2) sont celles de la forme:
$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) + e^{\frac{1}{2}t}(\gamma\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$.
avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ constantes réelles arbitraires.

B. Un lemme de du Bois-Reymond

5) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $h(t) = (1-t^2)^3$ si $|t| \leq 1$ et $h(t) = 0$ si non.
h est classe C^2 sur chacun des intervalles : $]-\infty,-1[$; $]-1,1[$; $]1,+\infty[$.

$$h'(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t > 1 \\ -6t(1-t^2)^2 \quad \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad t < -1 \end{cases} \quad ; \quad \lim_{\substack{t\to -1 \\ t\neq -1}} h'(t) = \lim_{\substack{t\to 1 \\ t\neq 1}} h'(t) = 0.$$

$$h''(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t > 1 \\ -6(1-t^2)^2 + 24t^2(1-t^2) \quad \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad t < -1 \end{cases} \quad ; \quad \lim_{\substack{t\to -1 \\ t\neq -1}} h''(t) = \lim_{\substack{t\to 1 \\ t\neq 1}} h''(t) = 0.$$

alors h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ avec : $h'(1) = h''(1) = h'(-1) = h''(-1) = 0$.

$$h'''(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t > 1 \\ 24t(1-t^2) + 48t(1-t^2) - 48t^3 \quad \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad t < -1 \end{cases} \quad ;$$

$\lim\limits_{\substack{t\to -1 \\ t<-1}} h'''(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 1 \\ t>1}} h'''(t) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{t\to -1 \\ t>-1}} h'''(t) = 48$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 1 \\ t<1}} h'''(t) = -48$.

$h'''(1)$ et $h'''(-1)$ n'existent pas, donc h n'est pas de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

6) Soient x_0, x_1 des nombres réels tels que : $x_0 < x_1$.
Soit $u(t) = \frac{x_1-x_0}{2}t + \frac{x_1+x_0}{2}$; u est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $u(-1) = x_0$ et $u(1) = x_1$ et $u(]x_0,x_1[) =]-1,1[$.
$g = h \circ u$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (comme composée de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$)
$g(]x_0,x_1[) = h(]-1,1[) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et $g(\mathbb{R}\backslash]x_0,x_1[) = h(\mathbb{R}\backslash]-1,1[) = \{0\}$.

7) Soit $F \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\int_0^1 F(x)u(x)dx = 0$ pour tout $u \in E^2_{0,0}$.
On rappelle que : $E^2_{0,0} = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que : $f(0) = f(1) = 0\}$.
Par l'absurde supposons que F n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$, puisque F est continue sur $[0,1]$, il existe $x_0, x_1 \in [0,1]$ tels que : $x_0 < x_1$ et F ne s'annule pas sur $[x_0,x_1]$.
donc F garde un signe constant sur $[x_0,x_1]$.
D'aprés la question précédente, il existe une fonction g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que :
$g(]x_0,x_1[) = h(]-1,1[) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et $g(\mathbb{R}\backslash]x_0,x_1[) = h(\mathbb{R}\backslash]-1,1[) = \{0\}$.
Soit u la restriction de g à $[-1,1]$, on a : $u \in E^2_{0,0}$ et donc : $\int_0^1 F(x)u(x)dx = 0 = \int_{x_0}^{x_1} F(x)g(x)dx$.
L'application : $[x \mapsto F(x)g(x)]$ est continue non identiquement nulle et garde un signe constant sur $[x_0,x_1]$ alors $\int_{x_0}^{x_1} F(x)g(x)dx \neq 0$ ce qui est absurde.

C. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E^2_{a,b}$ et J la fonction définie sur E par la formule :

$J(f) = \int_0^1 [P(f(x)) + Q(f'(x))]dx$; où $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes fixés.
Soit $f_0 \in E$. On suppose que : $\forall f \in E$; $J(f_0) \leq J(f)$. Soit $u \in E^2_{0,0}$.
8) On pose : $q(t) = J(f_0 + tu) = \int_0^1 [P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f_0'(x) + tu'(x))]dx$.
Si $P = \sum_{i=0}^r \alpha_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^r \beta_i X^i$ alors $[P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f_0'(x) + tu'(x))] = \sum_{i=0}^r \gamma_i(x) t^i$
avec $\gamma_0, \ldots, \gamma_r$ sont des applications continues sur $[0,1]$.
Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$; $q(t) = \sum_{i=0}^r a_i X^i$ avec : $\forall i = 0,\ldots,r$; $a_i = \int_0^1 \gamma_i(x)dx$.

$$[P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f_0'(x) + tu'(x))] = \sum_{i=0}^r \alpha_i (f_0(x) + tu(x))^i + \sum_{i=0}^r \beta_i (f_0'(x) + tu'(x))^i$$

$$[P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f_0'(x) + tu'(x))] = \sum_{i=0}^r \alpha_i \sum_{k=0}^i C_i^k t^k u(x)^k f_0(x)^{i-k} + \sum_{i=0}^r \beta_i \sum_{k=0}^i C_i^k t^k u'(x)^k f_0'(x)^{i-k}$$

Le coefficient de t dans cette somme est :

$$u(x) \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i^1 f(x)^{i-1} + u'(x) \sum_{i=1}^r \beta_i C_i^1 f'(x)^{i-1} = u(x) \sum_{i=1}^r i\alpha_i f(x)^{i-1} + u'(x) \sum_{i=1}^r i\beta_i f'(x)^{i-1}$$

$$= u(x)P'(f_0(x)) + u'(x)Q'(f_0'(x)).$$

D'où : $a_1 = \int_0^1 (u(x)P'(f_0(x)) + u'(x)Q'(f_0'(x)))dx$.

9) On suppose que pour tout $f \in E$; $J(f_0) \leq J(f)$.
On a : $\forall t \in \mathbb{R}$; $\forall u \in E^2_{0,0}$; $f_0 + tu \in E$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$; $q(0) \leq q(t)$.
D'où : $q'(0) = 0 = a_1$.

$$a_1 = \int_0^1 (u(x)P'(f_0(x)) + u'(x)Q'(f_0'(x)))dx = 0.$$

$$a_1 = \int_0^1 (u(x)(P'(f_0(x)) - \tfrac{d}{dx}Q'(f_0'(x))) + (u(x)\tfrac{d}{dx}Q'(f_0'(x))) + u'(x)Q'(f_0'(x)))dx = 0$$

$$a_1 = \int_0^1 (u(x)(P'(f_0(x)) - \tfrac{d}{dx}Q'(f_0'(x)))dx + \Big[u(x)Q'(f_0'(x))\Big]_0^1 = \int_0^1 (u(x)(P'(f_0(x)) - \tfrac{d}{dx}Q'(f_0'(x)))dx$$

alors : $\forall u \in E^2_{0,0}$; $\int_0^1 u(x)(P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx}Q'(f_0'(x)))dx$
L'application $\left[x \mapsto P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx}\left[Q'(f_0'(x))\right]\right]$ est continue sur $[0,1]$, alors d'aprés la question 7) cette application est nulle. d'où f_0 vérifie l'équation différentielle :

$$P'(f_0(x)) = \frac{d}{dx}\left[Q'(f_0'(x))\right] \quad (\Delta).$$

Exemples :

Premier exemple

10) On choisit ici $E = E^2_{0,1}$ et $J = J_1$ définie par : $J_1(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 dx$.
On est alors dans la cas : $P = 0$ et $Q = X^2$.
L'équation différentielle (Δ) s'écrit alors : $0 = \frac{d}{dx}\left[2f_0'(x)\right] = 2f_0''(x)$.
il existe $r,s \in \mathbb{R}$; telles que : $f_0(x) = rx + s$; $f_0(0) = s = 0$ et $f_0(1) = r = 1$. $f_0(x) = x$.

11) $J_1(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 dx$. Soit $f \in E^2_{0,1}$; $f_0'(x) = 1$

$$J_1(f) = J_1(f_0 + (f - f_0)) = \int_0^1 (f_0'(x) + (f-f_0)'(x))^2 dx = 1 + 2\int_0^1 (f-f_0)'(x)dx + \int_0^1 ((f-f_0)'(x))^2 dx$$

$\int_0^1 (f-f_0)'(x)dx = [(f-f_0)(x)]_0^1 = 0$ et $J_1(f) \geq 1 = J_1(f_0)$.
D'aprés ce qui précède, si J_1 admet un minimum sur $E^2_{0,1}$ alors ce minimum est unique donné par : $f_0(x) = x$. sa valeur est donc donné par : $J_1(f_0) = \int_0^1 (f_0'(x))^2 dx = 1$.

Deuxième exemple

12) On choisit $E = E^2_{0,0}$ et $J = J_2$ définie par : $J_2(f) = \int_0^1 [f'(x)^2 + f'(x)^3]dx$.
On est alors dans le cas où $P = 0$ et $Q = X^2 + X^3$.
L'équation différentielle (Δ) s'écrit alors : $0 = \frac{d}{dx}\left[2f_0'(x) + 3f_0'(x)^2\right] = 2f_0''(x) + 6f_0'(x)f_0''(x)$.
$3f_0'(x)^2 + 2f_0'(x)$ est constante sur $[0,1]$; $\lambda = (f_0'(x) + \frac{1}{3})^2$ est constante sur $[0,1]$.
$f_0'(x)$ ne peut prendre que deux valeurs sur $[0,1]$. Mais f_0' est continue sur le segment $[0,1]$ alors f_0' est constante sur $[0,1]$ et f_0 est affine de la forme $f_0(x) = rx + s$ et puisque $f_0(0) = f_0(1) = 0$ alors f_0 est nulle.

13) $f(x) = x^2(1-x)$; $\forall t \in \mathbb{R}$; $tf \in E^2_{0,0}$.
$f'(x) = 2x(1-x) - x^2 = 2x - 3x^2$.
$J_2(tf) = t^2\int_0^1 [f'(x)^2 + tf'(x)^3]dx = t^2\int_0^1 [4x^2 + 9x^4 - 12x^3 + 8tx^3 - 36tx^4 + 54tx^5 - 27tx^6]dx$.
$J_2(tf) = t^2(\frac{4}{3} + \frac{9}{5} - 3 + t(2 - \frac{36}{5} + 9 - \frac{27}{7})) = \frac{t^2}{105}(140 + 189 - 315 + t(210 - 756 + 945 - 405))$
$J_2(tf) = \frac{t^2}{105}(14 - 6t)$.
$J_2(3f) < 0 = J_2(f_0) < J_2(2f)$.
D'où J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$.

D. Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie $E = \{f \in C^4(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telles que : f^2 et f''^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}_+\}$
14) Soit $f \in E$, alors ff'' est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|ff''| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |f''|^2)$.
on déduit alors que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par l'absurde supposons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$.
Posons : $h(x) = f(x)^2$; $h'(x) = 2f(xf'(x)$, alors il existe $a > 0$ tq : $h(a) > 0$ et $\forall x \geq a$; $h'(x) > 0$.
h est strictement croissante sur $[a,+\infty[$; $\forall x \geq a$; $\int_a^x h(t)dt \geq (x-a)h(a) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$
ceci est absurde car h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
D'où $f(x)f'(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

15) Pour tout $a > 0$, $\int_0^a f(t)f''(t)dt = f(a)f'(a) - f(0)f'(0) - \int_0^a f'(t)^2dt$.
Puisque $f(x)f'(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante de $\mathbb{R}_+$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et la suite $(f(a_n)f'(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
$\forall n \in \mathbb{N}$; $\int_0^{a_n} f'(t)^2dt = \int_0^{a_n} f(t)f''(t)dt + f(0)f'(0) - f(a_n)f'(a_n)$.
De plus ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite $\left(\int_0^{a_n} f'(t)^2dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'où $f' \in L^2$.
On déduit alors que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f'(t)^2dt$ existe, et de l'égalité :
$\int_0^x f(t)f''(t)dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f'(t)^2dt$
On déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Posons : $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x)$.
Par l'absurde supposons que $l \neq 0$; alors il exste $a > 0$ tel que : $h(x) = f(x)^2$ définit une application strictement monotone sur $[a,+\infty[$ et $\forall x \in [a,+\infty[$; $|h'(x)| \geq |l|$ et $h'(x)l > 0$.
$\int_a^x h(t)dt = h(a)(x-a) + \int_a^x (h(t) - h(a))dt.$ selon le théorème des accroissements finis :
$\left|\int_a^x (h(t) - h(a))dt\right| \geq \int_a^x |l|(t-a)dt = |l|\frac{(x-a)^2}{2}$.
$\int_a^x h(t)dt \geq -|h(a)|(x-a) + |l|\frac{(x-a)^2}{2} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty.$ ceci contredit le faite que $f \in L^2$.
On déduit finalement que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = 0$.

N.B :

Dans cette partie, la fonction J est définie par : $J(f) = \int_0^{+\infty}[f(x)^2 - f'(x)^2 + f''(x)^2]dx$

On admettra que si la fonction J présente un minimum en un élèment f de E, alors f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle : (2) $y^{(4)} + y'' + y = 0$.

16) On a vu dans 4) que la solution générale de (2) est :
$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) + e^{\frac{1}{2}t}(\gamma\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$.
avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ constantes réelles arbitraires.
Posons : $y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$
y_1 est de classe C^4 sur $\mathbb{R}^+$; $|y_1(t)|^2 \underset{t\to+\infty}{=} O\ (e^{-t})$ et $[t \mapsto e^{-t}]$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
D'où $y_1 \in L^2$.
$\forall t \in \mathbb{R}_+$; $y_1'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) + e^{-\frac{1}{2}t}(-\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$
$y_1'(t)$ est aussi de la forme : $y_1'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha'\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta'\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$
alors aussi $y_1''(t)$ est de la forme : $y_1''(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha''\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta''\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$ donc $y_1'' \in L^2$.
On déduit alors que $y_1 \in E$.
Posons : $y_2(t) = e^{\frac{1}{2}t}(\gamma\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$.
$\forall t \in \mathbb{R}_+$; $y_2'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}(\gamma\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}t}(-\gamma\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$.
$y_2(t)y_2'(t) = \frac{1}{2}e^t(\gamma\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \delta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^t(\gamma\delta\cos(t\sqrt{3}) + (\frac{\delta^2-\gamma^2}{2})\sin(t\sqrt{3}))$.
Pour tout entier naturel n on a :
$y_2(\frac{4n\pi}{\sqrt{3}})y_2'(\frac{4n\pi}{\sqrt{3}}) = (\frac{\gamma^2}{2} + \gamma\delta\frac{\sqrt{3}}{2})e^{\frac{4n\pi}{\sqrt{3}}}$.
$y_2(\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}})y_2'(\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}}) = (\frac{\delta^2}{2} - \gamma\delta\frac{\sqrt{3}}{2})e^{\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}}}$.
Si $y_2 \in E$, alors d'aprés 15) les deux expressions précèdentes tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. $y_2(\frac{4n\pi}{\sqrt{3}})y_2'(\frac{4n\pi}{\sqrt{3}}) + e^{\frac{-\pi}{\sqrt{3}}}y_2(\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}})y_2'(\frac{(4n+1)\pi}{\sqrt{3}}) = (\frac{\gamma^2+\delta^2}{2})e^{\frac{4n\pi}{\sqrt{3}}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$
alors $y_2 \in E$ si et seulement si $\gamma = \delta = 0$.
L^2 étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on déduit alors que les solutions de (2) qui appartiennent à E sont les fonctions :
$y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$ avec α,β constantes réelles arbitraires.
On note : $\forall t \in \mathbb{R}_+$; $e_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2})$ et $e_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})$.

N.B :

On admettra que pour tous réels α,β : $J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2}$.
On posera également, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3})$.

17) Le polynôme caractéristique de l'équation (3) $y'' + y' + y = 0$ est
$T(\mu) = \mu^2 + \mu + 1 = (\mu - j)(\mu - j^2)$ et $j = \overline{j^2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Alors la solution génèrale de (3) est :
$y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(\alpha\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \beta\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$ avec α,β constantes réelles arbitraires.
Si J présente un minimum en un élèment f de E alors d'aprés la question précèdente f est de type y_1 et donc f est solution de (3).
Il existe $\alpha_0,\beta_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $f = \alpha_0 e_1 + \beta_0 e_2$.
On pose : $\varphi(\alpha,\beta) = J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2}$.
φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et présente un minimum au point (α_0,β_0), alors :

$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha_0,\beta_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}(\alpha_0,\beta_0) = 0$ càd : $\begin{cases} \alpha_0+\beta_0\sqrt{3} = 0 \\ 3\beta_0+\alpha_0\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_0+\beta_0\sqrt{3} = 0.$

Alors : $f(t) = 2\beta_0 e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))$

$f(t) = 2\beta_0 e^{-\frac{1}{2}t}(\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2})\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2})) = 2\beta_0 e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}).$

Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f = \lambda\psi$.

18) Posons : $I(A) = \int_0^A [f(x)^2 - f'(x)^2 + f''(x)^2]dx - \int_0^A [f(x)+f'(x)+f''(x)]^2 dx$

$I(A) = \int_0^A (-2f'(x)^2 - 2f(x)f'(x) - 2f(x)f''(x) - 2f'(x)f''(x))dx$

$I(A) = -2\int_0^A f'(x)^2 dx - 2\int_0^A f(x)f''(x)dx - [f(x)^2]_0^A - [f'(x)^2]_0^A$

$I(A) = -2\int_0^A f'(x)^2 dx - 2[f(x)f'(x)]_0^A + 2\int_0^A f'(x)^2 dx - [f(x)^2]_0^A - [f'(x)^2]_0^A$

$I(A) = -2[f(x)f'(x)]_0^A - [f(x)^2]_0^A - [f'(x)^2]_0^A = (f(0)+f'(0))^2 - (f(A)+f'(A))^2$

Si $f \in A$ alors f, f', f'' sont dans L^2 alors $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A)$ existe et donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(f(A)+f'(A)\right)^2$ existe aussi.

Mais l'application $\left[t \mapsto \left(f(t)+f'(t)\right)^2\right]$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(f(A)+f'(A)\right)^2 = 0.$

$J(\lambda\psi) = \lambda^2\int_0^{+\infty}[\psi(x)^2 - \psi'(x)^2 + \psi''(x)^2].$

Pour tout réel $A > 0$, on pose :

$I_\lambda(A) = \lambda^2\int_0^A[\psi(x)^2 - \psi'(x)^2 + \psi''(x)^2]dx - \lambda^2\int_0^A[\psi(x)+\psi'(x)+\psi''(x)]^2 dx.$

Mais ψ est solution de l'équation différentielle : $(3) \quad y''+y'+y = 0.$

$I_\lambda(A) = \lambda^2\int_0^A[\psi(x)^2 - \psi'(x)^2 + \psi''(x)^2]dx = \lambda^2(\psi(0)+\psi'(0))^2 - \lambda^2(\psi(A)+\psi'(A))^2.$

$J(\lambda\psi) = \lambda^2(\psi(0)+\psi'(0))^2 - \lambda^2 \lim\limits_{A\to+\infty}(\psi(A)+\psi'(A))^2 = \lambda^2(\psi(0)+\psi'(0))^2.$

$\psi(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3})$ et $\psi'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3})$

$\psi(t)+\psi'(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}) = e^{-\frac{t}{2}}\sin(t\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\forall\lambda \in \mathbb{R} \quad ; \quad J(\lambda\psi) = 0.$

D'aprés ce qui précède : Pour tout f élément de E, on a :

$\int_0^A[f(x)^2 - f'(x)^2 + f''(x)^2]dx = \int_0^A[f(x)+f'(x)+f''(x)]^2 dx + (f(0)+f'(0))^2 - (f(A)+f'(A))^2$

et donc : $J(f) = \int_0^{+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]^2 dx + (f(0)+f'(0))^2 \geq 0.$

D'où J admet un minimum au point $\lambda\psi$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.

19) D'aprés la question précèdente :

$\forall f \in E \quad ; \quad J(f) = \int_0^{+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]^2 dx + (f(0)+f'(0))^2 \geq 0.$

L'application $\left[x \mapsto [f(x)+f'(x)+f''(x)]^2\right]$ est continue positive sur $\mathbb{R}_+$, alors $J(f) = 0$ si et seulement si f est solution de l'équation différentielle : (3) $y''+y'+y = 0$ et $f(0)+f'(0) = 0$.

si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(\alpha\cos(x\frac{\sqrt{3}}{2}) + \beta\sin(x\frac{\sqrt{3}}{2}))$

$f(x)+f'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\alpha\cos(x\frac{\sqrt{3}}{2}) + \beta\sin(x\frac{\sqrt{3}}{2})) + e^{-\frac{x}{2}}(-\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x\frac{\sqrt{3}}{2}) + \beta\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x\frac{\sqrt{3}}{2}))$

$f(0)+f'(0) = 0 = \frac{\alpha}{2} + \beta\frac{\sqrt{3}}{2}.$

On retrouve alors la même forme de fonction trouvée dans la question 17), c'est à dire $J(f) = 0$ si et seulement si f est de la forme : $f = \lambda\psi$ avec λ un réel.

On retrouve alors le résultat de la question 18).

E. Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la question précèdente, et pour tout $g \in L^2$, on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} g(x)^2 dx}$$

20) Soit $f \in L^2$, $\mu > 0$, et $A > 0$. on pose : $u = \mu x$

$\int_0^A f(\mu x)^2 dx = \frac{1}{\mu}\int_0^A f(x)^2 dx \underset{A \to +\infty}{\to} \frac{1}{\mu}\|f\|^2$

Alors $f_\mu(x) = f(\mu x)$ définit un élèment de L^2.

Si de plus $f \in E$, alors d'une part f_μ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0$; $f_\mu''(x) = \mu^2 f''(\mu x)$

alors puisque $f'' \in L^2$, l'étape précèdente permet de déduire que $f_\mu \in E$.

D'aprés la question précèdente : $\forall \mu > 0$; $J(f_{\sqrt{\mu}}) \geq 0$.

$\forall \mu > 0$; $\mu^2 \left\|f''\right\|^2 - \mu\left\|f'\right\|^2 + \|f\|^2 \geq 0$. (inégalité aussi vraie pour $\mu \leq 0$)

$\forall \mu \in \mathbb{R}$; $\mu^2 \left\|f''\right\|^2 - \mu\left\|f'\right\|^2 + \|f\|^2 \geq 0$

D'où le desrciminant de ce trinôme est négatif, c'est à dire : $\Delta = \left\|f'\right\|^4 - 4\|f\|^2\left\|f''\right\|^2 \leq 0$

Finalement : $\forall f \in E$; $\left\|f'\right\|^2 \leq 2\|f\|\left\|f''\right\|$.

21) Si $f \in E$ tel que : $\left\|f'\right\|^2 = 2\|f\|\left\|f''\right\|$ alors $\Delta = 0$ et donc $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$\mu^2\left\|f''\right\|^2 - \mu\left\|f'\right\|^2 + \|f\|^2 = 0$.

Si $\mu \leq 0$ alors $\|f\| = 0$ et donc f est l'application nulle.

Si $\mu > 0$ alors $J(f_{\sqrt{\mu}}) = 0$, donc d'aprés ce qui précède il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f_{\sqrt{\mu}} = \lambda\psi$

Conclusion :

Soit $f \in E$.

$\left\|f'\right\|^2 = 2\|f\|\left\|f''\right\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$; $\exists \mu > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$; $f(x) = \lambda\psi(\frac{x}{\mu}) = \lambda e^{-\frac{x}{2\mu}}\sin(\frac{x\sqrt{3}}{2\mu} - \frac{\pi}{3})$.