Concours National commun - Session 2014

Épreuve spécifique - Filière MP

Mathématiques I

Durée : 4 heures

•••••••••••

L'usage de la calculatrice est **interdit**.

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Exercice

On considère la fonction de deux variables $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(1,1) = 0 \text{ et } F(x,y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{(1-xy)} \text{ si } (x,y) \neq (1,1)$$

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $(1-x)(1-y) \leq (1-\sqrt{xy})$
2. Montrer F est continue sur $[0,1]^2$.
3. En déduire que F est bornée sur $[0,1]^2$ et atteint ses bornes.
4. Déterminer la borne inférieure de F sur $[0,1]^2$, en quels points de $[0,1]^2$ cette borne est-elle atteinte ?
5. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^l$ sur l'ouvert $]0,1[^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.
6. Montrer que F admet un unique point critique (x_o, y_o) dans l'ouvert $]0,1[^2$ et le préciser.
7. Calculer $F(x_o, y_o)$ et justifier que $F(x_o, y_o) = \sup\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y)$.

Problème

À propos de l'unimodularité des zéros d'un polynôme auto-inverse

On note $\mathbb{U}$ le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$, c'est à dire $\mathbb{U} = \{z \in C / |z| = 1\}$. On rappelle que l'application $\gamma :]0, 2\pi[\mapsto \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}$ est un paramétrage de $\mathbb{U}$, avec 1 pour seul point multiple (double). Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{U}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue, on définit l'intégrale curviligne de f sur l'arc paramétré $([0, 2\pi], \gamma)$ par : $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Première partie
Résultats préliminaires

1.1 Rappeler le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction , $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$, définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

1.2 Montrer que, pour tout complexe p de module $\beta| < 1$ et tout réel t, on a :

$$\frac{e^{it}}{e^{it} - \beta} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m e^{-imt}.$$

1.3 Montrer que, pour tout complexe β de module $|\beta| > 1$ et tout réel t, on a :

$$\frac{e^{it}}{e^{it} - \beta} = -\frac{e^{it}}{\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^{-m} e^{imt}.$$

1.4 Soit β un nombre complexe de module différent de 1 et soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{\beta\}$ par $f(z) = \dfrac{1}{z - \beta}$. Montrer, en justifiant soigneusement votre réponse, que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } |\beta| < 1, \\ 0 & \text{si } |\beta| > 1. \end{cases}$$

1.5 Un résultat de convexité : Le disque unité fermé de $\mathbb{C}$ est strictement convexe.
Montrer que si u et w sont des complexes distincts et de module 1, et si λ et μ sont des réels strictement positifs de somme 1, alors $|\lambda u + \mu v| < 1$.
Dans la suite on admet que, Pour tout entier $n \geq 2$, si $u_1, ..., u_n$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{U}$ et si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont des réels strictement positifs de somme 1, alors $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right| < 1$.

Deuxième partie
Deux résultats de localisation des racines d'un polynôme

Dans cette partie, P désigne un polynôme non constant à coefficients complexes. On note $z_1, ..., z_r$ ($r \geq 1$) les racines de P dans $\mathbb{C}$ et, pour tout $k \in \{1, ..., r\}$, on note α_k l'ordre de multiplicité de la racine z_k de P. Ainsi, en notant a le coefficient dominant de P, on obtient $P = a \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{\alpha_k}$.

2.1 Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{z_1, ..., z_r\}$, $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \dfrac{\alpha_k}{z - z_k}$ où P' est le polynôme dérivé de P.

2.2 On suppose que $w \in \mathbb{C}$ est une racine de P' qui n'est pas racine de P.

2.2.1 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \dfrac{\alpha_k(w - z_k)}{|w - z_k|^2} = 0$.

2.2.2 En déduire qu'il existe des réels $\beta_1, ..., \beta_r$, strictement positifs de somme 1, tels que

$$w = \sum_{k=1}^{r} \beta_k z_k.$$

Ceci signifie que w est barycentre, à coefficients tous strictement positifs, des racines de P.

2.8 Montrer que toute racine de P' est barycentre à coefficients positifs des racines de P.

2.4 On suppose ici que P ne s'annule pas sur le cercle unité $\mathbb{U}$, ce qui veut dire que $\mathbb{U} \cap \{z_1, ..., z_r\} = \emptyset$.

2.4.1 Justifier que l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{z_1, ..., z_r\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le cercle unité $\mathbb{U}$ et que la fonction $z \mapsto \dfrac{P'(z)}{P(z)}$, définie sur $\mathbb{C}\backslash\{z_1, ..., z_r\}$, est continue.

2.4.2 Montrer que $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z$ est égal au nombre de racines de P dont le module est strictement inférieur à 1, comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité.

Troisième partie
Une condition suffisante d'unimodularité des zéros d'un polynôme auto-inverse

Un polynôme à coefficients complexes $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, de degré $d \in \mathbb{N}^*$ est dit auto-inverse quand il'existe un nombre complexe $\varepsilon \neq 0$ (dit paramètre) vérifiant $a_k = \varepsilon \overline{a_{d-k}}$, pour tout $k \in \{0, ..., d\}$.

Si $q \in \mathbb{N}$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\overline{Q} = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \overline{b_k} X^k$. $\overline{Q}$ est ainsi le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ obtenu en conjuguant tous les coefficients de Q ; en particulier $\overline{Q}(\overline{z}) = \overline{Q(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

8.1 Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, le polynôme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (k - n) X^k$ est auto-inverse.

8.2 Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré $d \in \mathbb{N}^*$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$.

3.2.1 Montrer que si P est auto-inverse de paramètre ε, alors $|\varepsilon| = 1$ et $P(0) \neq 0$.

3.2.2 Montrer que P est auto-inverse de paramètre ε si et seulement si

$$P(z) = \varepsilon z^d \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C}^* \tag{1}$$

3.3 Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$; vérifier que $\overline{F+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$ et $\overline{PQ} : \overline{FQ}$.

8.4 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$ un complexe de module 1. On note $P\mu \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme défini par $P_\mu(z) = P(\mu z)$, $z \in \mathbb{C}$.

3.4.1 Montrer que si P est auto-inverse alors $(X-1)P$ l'est aussi.

3.4.2 Montrer que si P est auto-inverse alors P_μ l'est aussi.

3.4.3 Montrer que si toutes les racines de P sont de module 1, alors P est auto-inverse.

5.4.4 Donner un exemple de polynôme auto-inverse de degré 2 ayant une racine de module $\neq 1$.

3.5 Soient ε un nombre complexe de module 1 et $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$; si d est un entier $> n$, on note R le polynôme défini par

$$R(z) = z^{d-n} Q(z) + \varepsilon z^n \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C}^*.. \tag{2}$$

Préciser le degré de R et montrer qu'il est auto-inverse. On note a_d le coefficient dominant de R.

3.6 On reprend les hypothèses de la question 3.5 précédente et on suppose que les racines de Q sont toutes de module < 1. On note Q_1 et Q_2 les polynômes complexes définis par

$$Q_1(z) = zd^{d-n} Q(z), \quad Q_2(z) = \varepsilon z^n \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C}^*$$

3.6.1 Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|Q_1(z)| = |Q_2(z)|$.

3.6.2 Montrer que, pour tout réel $\lambda \in [0, 1[$, le polynôme $R_\lambda = Q_1 + Q_2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{U}$.
On considère l'application $\lambda \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{Q_1'(z) + \lambda Q_2'(z)}{Q_1(z) + \lambda Q_2(z)} \, \mathrm{d}z$ *définie sur l'intervalle* $[0, 1[$.

3.6.3 Montrer que cette application est continue sur l'intervalle $[0, 1[$ et qu'elle est à valeurs entières.

3.6.4 En déduire que l'application précédente est constante sur l'intervalle $[0, 1[$.

3.6.5 Montrer alors que, pour tout $\lambda \in [0, 1[$, les racines de R_λ sont toutes de module < 1.

3.7 On reprend. les hypothèses des questions 3.5 et 3.6 précédentes ; on vient d'établir qu'il existe une famille $z_{1,\lambda}, z_{2,\lambda}, , ..., z_{d,\lambda}$, de complexes de module < 1 tels que

$$R_\lambda = Q_1 + \lambda Q_2 = a_d \prod_{k=1}^{d} (X - z_{k,\lambda}).$$

3.2.1 Montrer l'existence d'une suite $(\lambda_m)_m$ d'éléments de l'intervalle $[0, 1[$ tendant vers 1 telle que, pour tout $k \in \{1, ..., d\}$, la suite $(z_{k,\lambda_m})_m$ converge vers un complexe z_k vérifiant $|z_k| \leq 1$.

3.7.2 Montrer que $R = a_d \prod_{k=1}^{d} (X - z_k)$.

3.7.3 Montrer que les racines au polynôme auto-inverse R sont toutes de module ≥ 1 puis conclure qu'elles sont toutes de module 1.

Quatrième partie
Quelques applications

4.1 Étude des racines du polynôme S_n

On considère les polynômes $A_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$, $B_n = XA_n' = \sum_{k=0}^{n} kX^k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{2n}(k-n)X^k$, $n \geq 2$.

L'objectif de cette section est de montrer que les racines du polynôme S_n sont toutes de module 1.

4.1.1 Déterminer les racines complexes de A_n et vérifier qu'elles sont toutes simples et de module 1.

4.1.2 Montrer que les racines complexes de A_n' sont toutes de module strictement inférieur à 1.

4.1.3 En déduire que les racines complexes de B_n sont toutes de module strictement inférieur à 1.

4.1.4 Montrer alors que les racines complexes du polynôme S_n sont toutes de module 1. On pourra chercher une représentation de S_n de la forme (2).

Dans la suite du problème, on admet que le résultat obtenue dans les questions 3.5, 3.6 et 3.7 s'étend sous la forme suivante : si Q et R sont des polynômes vérifiant une identité de la forme (2), et si les racines de Q sont toutes de module ≤ 1 alors celles de R sont toutes de module 1.

4.2 Une condition nécessaire et suffisante d'unimodularité des zéros d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines de P sont toutes de module 1 si, et seulement si, P est auto-inverse et toutes les racines de P' sont de module ≤ 1.

Indication : Si P est auto-inverse de paramètre ε, on pourra dériver les deux membres de la relation (1), établie dans la question 3.2.2. de la troisième partie, pour trouver une représentation de P de la forme (2).

4.3 Des conditions suffisantes d'unimodularité plus maniables

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme auto-inverse de paramètre ε et de degré $d \in \mathbb{N}^*$.

4.3.1 On suppose ici que $|a_d| \geq \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{d-1} |a_k|$. Montrer que les racines de P sont toutes de module 1.

Indication : On pourra considérer le polynôme Q défini par

$$Q = \frac{1}{2}a_p + \sum_{k=1}^{p} a_{p+k}X^k \text{ si } d = 2p \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{k=1}^{p+1} a_{p+k}X^{k-1} \text{ si } d = 2p+1$$

et montrer que les racines de Q sont toutes de module ≤ 1.

4.3.2 Dans cette question, on suppose que $|a_d| \geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d-1}|a_k - a_{k+1}|$. Montrer que les racines de P sont toutes de module 1.
Indication : On remarquera qu'il suffit de montrer le résultat demandé pour le polynôme $(X-1)P$.

4.3.3 On suppose dans cette dernière question que $|a_d| \geq \frac{1}{2}\inf_{\nu\in\mathbb{U}}\sum_{k=1}^{d-1}|a_k - \nu a_{k+1}|$. Montrer que les racines de P sont toutes de module 1.
Indication : On pourra appliquer ce précède au polynôme $z \mapsto P(\mu z)$ pour $\mu \in \mathbb{U}$ bien choisi.

Fin de l'épreuve