Mathématiques 2

MP

2021

EXTRAIT

Dans cette partie,

— pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée k-ième continue sur $\mathbb{R}$ (si $k = 0$, f est continue) ; on dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si f est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$;

— on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ *continues* et intégrables sur $\mathbb{R}$;

— pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$;

— on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ *continues* et bornées sur $\mathbb{R}$;

— pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^\mathbb{R}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$. On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

II.A – Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Q 20. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Q 21. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Q 22. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout réel x. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ, exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ.

II.B – Produit de convolution

Si f et g sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle produit de convolution de f et g, et on note $f * g$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la sous-partie II.B que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Q 23. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = (g * f)(x).$$

Q 24. Montrer que $f * g$ est bornée et que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Q 25. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ et si les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in [\![0, k]\!]$, alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)})$.

Q 26. On suppose toujours que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. En admettant que, pour tout ξ réel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(t) g(x-t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

existent et sont égales, montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Fin extrait