

Corrigé

I

16

a) Soit $\delta = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ $\delta^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ donc $\delta^2 = -3 + 4i$ si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = |\delta|^2 = |-3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 2b^2 = 8 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ et } b = 2 \\ \text{ou } a = -1 \text{ et } b = -2 \end{cases}$$

donc les racines carrées de $-3 + 4i$ sont $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

b) Le discriminant de $U(X)$ est $(1 - 2i)^2 - 4(-2i) = 1 - 4i - 4 + 8i = -3 + 4i$. Donc les racines de $U(X)$ sont :

$$z_1 = \frac{-1 + 2i + 1 + 2i}{2} = 2i \text{ et } z_2 = \frac{-1 + 2i - 1 - 2i}{2} = -1.$$

17

Si $z = x + yi$ avec x et y réels $U(z) = z^2 + (1 - 2i)z - 2i = (x + iy)^2 + (1 - 2i)(x + iy) - 2i = x^2 - y^2 + 2ixy + x - 2ix + iy + 2y - 2i = (x^2 - y^2 + x + 2y) + i(2xy - 2x + y - 2)$. La partie réelle de $U(z)$ est $x^2 - y^2 + x + 2y$ et sa partie imaginaire est $2xy - 2x + y - 2$.

II

18 Soit P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ Soit α de $\mathbb{C}$ Soit $Q_1(X)$ et $R_1(X)$ les quotient et reste de la division euclidienne de $P_1(X^2)$ par $T(X)$ alors. Soit $Q_2(X)$ et $R_2(X)$ les quotient et reste de la division euclidienne de $P_2(X^2)$ par $T(X)$ donc : $\deg(R_1(X)) < \deg(T)$ et : $\deg(R_2(X)) < \deg(T(X))$ et : $P_1(X^2) = Q_1(X)T(X) + R_1(X)$ et $P_2(X^2) = Q_2(X)T(X) + R_2(X)$ donc $(\alpha P_1 + P_2)(X^2) = \alpha P_1(X^2) + P_2(X^2) = \alpha(Q_1(X)T(X) + R_1(X)) + Q_2(X)T(X) + R_2(X) = (\alpha Q_1(X) + Q_2(X))T(X) + \alpha R_1(X) + R_2(X)$.

Or $\deg(\alpha R_1(X) + R_2(X)) < \sup(\deg(\alpha R_1(X)), \deg(R_2(X)))$. Si $\alpha = 0$ alors $\deg(\alpha R_1(X)) = -\infty \leq \deg(R_2(X)) < \deg(T(X))$. Si $\alpha \neq 0$ alors $\deg(\alpha R_1(X)) = \deg(R_1(X)) < \deg(T(X))$. Donc $\sup(\deg(\alpha R_1(X)), \deg(R_2(X))) < \deg(T(X))$ donc $\alpha R_1(X) + R_2(X)$ est le reste de la division de $\alpha P_1(X^2) + P_2(X^2)$ par $T(X)$ et $\alpha Q_1(X) + Q_2(X)$ son quotient. Donc $f(\alpha P_1(X) + P_2(X)) = \alpha Q_1(X) + Q_2(X) + X(\alpha R_1(X) + R_2(X)) = \alpha(Q_1(X) + XR_1(X)) + Q_2(X) + XR_2(X) = \alpha f(P_1(X)) + f(P_2(X))$ donc f est linéaire.

19 Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$. Soit p son degré. On a donc : $p \leq n$ $P(X^2)$ est de degré $2p$. Soit $Q(X)$ le quotient de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$ et $R(X)$ son reste. Or $\deg(R(X)) < \deg(T(X)) = n$ donc $\deg(XR(X)) = \deg(X) + \deg(R(X)) = 1 + \deg(R(X)) \leq n$. $\deg(Q(X)) = 0$ si $2p < n$ et à $2p - n$ si $2p \geq n$ or $2p - n \leq 2n - n = n$ donc dans tous les cas $\deg(Q(X)) \leq n$. Or $f(P(X)) = Q(X) + XR(X)$ donc $\deg(f(P(X))) \leq \sup(\deg(Q(X)), \deg(XR(X))) \leq n$ donc $f(P(X))$ appartient à $\mathbb{C}_n[X]$ Donc f_n va bien de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ de plus la restriction d'une application linéaire est une application linéaire donc f_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$

20

a)

$f(1) = 0 + X \times 1 = X$ car $1 = 0 \times T(X) + 1$ et $Q(X) = 0$ et $R(X) = 1$. Si $P(X) = X$ $P(X^2) = X^2 = 1 \times X^2 + 0$ donc ici $Q(X) = 1$ et $R(X) = 0$ donc $f(X) = 1$. Si $P(X) = X^2$ $P(X^2) = X^4 = X^2 \times X^2 + 0$ donc ici $Q(X) = X^2$ et $R(X) = 0$ donc

$$f(X^2) = X^2 \text{ donc la matrice } A \text{ est la matrice : } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $f_2 = \text{id}$ l'application identité donc f_2 est une symétrie vectorielle. Elle est

bijetive et son application réciproque est elle même.

21 $U(X^2) = V(X) = (X-i)(X+i)(X-1-i)(X+1+i)$ (car les racines de $V(X)$ sont $1+i, -1-i, i, -i$) donc $U(X^2) = T(X)(X-i)(X+1+i)$ donc $Q(X) = (X-i)(X+1+i)$ et $R(X) = 0$ donc $f(U(X)) = (X-i)(X+1+i)$.

III

22 Si $P=1$ $P(X^2)=1$ $1=0 \times T(X)+1$ donc $Q(X)=0$ et $R(X)=1$ donc $f(1)=X$
 Si $P=X$ $P(X^2)=X^2$ $1=0 \times T(X)+X^2$ donc $Q(X)=0$ et $R(X)=X^2$ donc $f(X)=X^3$
 Si $P=X^2$ $P(X^2)=X^4=(X-1)(X^3+X^2+a)+X^2-aX+a$ donc $Q(X)=X-1$ et $R(X)=X^2-aX+a$
 donc $f(X^2) = X-1+X(X^2-aX+a) = X^3-aX^2+(a+1)X-1$. Si $P=X^3$ alors $P(X^2) = X^6 = (-a-1+X-X^2+X^3)(X^2+X^2+a)+(2a+1)X^2-aX+a^2+a$ donc $Q(X) = (-a-1+X-X^2+X^3)$ et $R(X) = (2a+1)X^2-aX+a^2+a$
 donc $f(X^3) = (-a-1+X-X^2+X^3) + X((2a+1)X^2-aX+a^2+a) = (2a+2)X^3+(-1-a)X^2+(1+a^2+a)X-a-1$. Donc

la matrice de f_3 sur la base canonique est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & a+1+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$.

23 Pour calculer le déterminant de f_3 on calcule le déterminant de B .
 Pour calculer le déterminant de B on développe suivant la première colonne

donc $\det B = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & -a & -a-1 \\ 1 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -a-1 \\ -a & -a-1 \end{vmatrix}$ (on développe suivant la première colonne donc

$\det(B) = -[(-a-1)-(-a-1)(-a)] = -a-1+a^2+a=a^2-1$.

24. f_3 n'est pas bijective si et seulement si $\det(f_3)=a^2-1=0$ donc si et seulement si $a=1$ ou $a=-1$.

25. Si $a=-1$ donc f_3 a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i)

Si $P=a+bX+cX^2+dX^3$ donc $f_3(P)=-c+(a+d)X+cX^2+(b+c)X^3$ donc $f(P)=0$ si et seulement si

$$\begin{cases} -c=0 \\ a+d=0 \\ c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-d \\ b=0 \end{cases}$$

Donc $\ker f_3 = \{a(1-X^3) \mid a \in \mathbb{R}\}$ et une base est le vecteur non nul $1-X^3$.

ii)

$\text{Ker} f_3$ est de dimension 1 donc d'après le théorème du rang $\text{Im} f_3$ a pour dimension $\dim \mathbb{C}_3[X] - 1 = 4 - 1 = 3$. Or $(1, X, X^2, X^3)$ base de $\mathbb{C}_3[X]$ donc $(f_3(1), f_3(X), f_3(X^2), f_3(X^3))$ forme une partie génératrice de $\text{Im} f_3$ or $f_3(1)=f_3(X^3)$ donc $(f_3(1), f_3(X), f_3(X^2))$ forme une partie génératrice de $\text{Im} f_3$ donc une base de $\text{Im} f_3$ car c'est une partie génératrice ayant autant d'éléments que la dimension de $\text{Im} f_3$.

- iii) Deux sev sont supplémentaires si la réunion d'une base de l'un et d'une base de l'autre forme une base de $E = \mathbb{C}^4$ donc si $(1-X^3, X, X^3, -1+X^2+X^3)$ base de $\mathbb{C}_4[X]$. La matrice de ces 4

polynômes sur la base canonique est la matrice $M : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ pour calculer le

déterminant de M on développe suivant la deuxième colonne donc

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ donc base. (On a développé suivant la deuxième}$$

ligne). Le noyau et l'image sont supplémentaires.

IV

- 26 Si $P(X)$ est de degré p avec $2p < n$ $P(X^2)$ est de degré $2p < n = \deg(T(X))$ donc $P(X^2) = 0 \times T(X) + P(X^2)$ donc $F(P) = XP(X^2) \neq 0$ donc P n'appartient pas au noyau de f .
- 27 Si P appartient à $\text{Ker } f$ alors $Q(X) + XR(X) = 0$ avec $Q(X)$ et $R(X)$ qui sont respectivement le reste et le quotient de la division de $P(X^2)$ par $T(X)$ donc $Q(X) = -XR(X)$ donc $P(X^2) = -XR(X)T(X) + R(X) = R(X)(-XT(X) + 1)$ et $\deg(R(X)) < \deg(T(X)) = n$ car $R(X)$ est un reste. **Réciproquement** s'il existe $R(X)$ de degré inférieur strictement à n tel que $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$ alors $P(X^2) = -XR(X)T(X) + R(X)$ comme : $\deg(R(X)) < \deg(T(X))$ alors $R(X)$ est le reste de la division de $P(X^2)$ par $T(X)$ et $-XR(X)$ son quotient donc $f(P(X)) = -XR(X) + XR(X) = 0$.
- 28 Si P appartient à $\text{Ker } f$ alors il existe $R(X)$ de degré q ($q < n$) et $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$. Or $-XT(X)$ est de degré $n+1$ donc $-1+XT(X)$ aussi donc $R(X)(1 - XT(X))$ est de degré $q+n+1 < n+n+1$ donc $P(X^2)$ est de degré inférieur ou égal à $2n$ donc $P(X)$ est de degré inférieur ou égal à n .
- 29 Si $P(X)$ est un élément du noyau. Donc il existe $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$ Si k est tel que $k + \deg(P(X)) \leq n$ alors $X^{2k}P(X^2) = X^{2k}R(X)(1 - XT(X))$ or si $p = \deg(P(X))$ alors $2p = \deg(R(X)) + n + 1$ d'après la question précédente donc $2k + 2p = 2k + \deg(R(X)) + n + 1$ donc $2k + \deg(R(X)) + n + 1 \leq 2n$ donc $2k + \deg(R(X)) + 1 \leq n$ donc $2k + \deg(R(X)) < n$ donc en utilisant la réciproque de la question 27 $X^kP(X)$ appartient au noyau.

30

- a) I est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ donc possède un plus petit élément.

- b) Soit a le coefficient dominant de $P_0(X)$ et b celui de $P_1(X)$ soit $c = -\frac{b}{a}$ Soit $P_2(X) = P_0(X) + cP_1(X)$

donc P_2 étant combinaison linéaire d'éléments de $\text{Ker } f$ est élément de $\text{Ker } f$ d'autre part les coefficients dominants s'annulent $P_2(X)$ est de degré strictement inférieur à d il est donc forcément nul sinon on aurait un élément de I (le degré de $P_2(X)$) strictement inférieur à d le plus élément de I .

- c) Soit $Q(k)$ la proposition dépendant de k définie pour tout entier k compris entre d et n : $Q(k) : \forall P(X)$ polynôme de degré k de $\text{ker } f$ il existe un polynôme $S(X)$ de degré $k-d$ tel que $P(X) = S(X)P_0(X)$ $Q(d)$ est vraie on l'a démontré dans la question 30b. Soit k de $\mathbb{N}$ compris entre d et $n-1$ tel que $Q(d), \dots, Q(k)$ sont vraies montrons que $Q(k+1)$ est vraie. Soit $P(X)$ un polynôme de $\text{Ker } f$ de degré $k+1$ et de coefficient dominant c . $X^{k+1-d}P_0(X)$ appartient à $\text{ker } f$ d'après la question 29

donc $P(X) - \frac{c}{a}X^{k+1-d}P_0(X)$ appartient à $\text{ker } f$ son degré est strictement inférieur à $k+1$ qui est le

degré commun de $P(X)$ et de $\frac{c}{a}X^{k+1-d}P_0(X)$ car les coefficients dominants s'annulent. Si q est le

degré de $(P(X) - \frac{c}{a}X^{k+1-d}P_0(X))$. Si $q < d$ alors $(P(X) - \frac{c}{a}X^{k+1-d}P_0(X)) = 0$ car c'est un polynôme de degré plus petit que le plus petit des degrés des polynômes non nuls. Si $d \leq q$ comme $Q(q)$ est vraie

alors il existe un polynôme $S_1(X)$ de degré $q-d$ tel que $(P(X) - \frac{C}{a} X^{k+1-d} P_0(X)) = S_1(X) P_0(X)$ donc

$P(X) = (\frac{C}{a} X^{k+1-d} + S_1(X)) P_0(X)$ de la forme $S_2(X) P_0(X)$ avec $S_2(X) = \frac{C}{a} X^{k+1-d} + S_1(X)$ donc de

degré $k+1-d$. Donc $Q(k+1)$ est vraie donc pour tout k entier compris entre d et n $Q(k)$ est vraie donc tout polynôme de $\text{Ker } f$ est de la forme $S(X) P_0(X)$ avec $S(X)$ de degré inférieur ou égal à $n-d$.

Réciproquement : $S(X) P_0(X)$ avec $S(X)$ de degré inférieur ou égal à $n-d$ est combinaison linéaire de polynômes de la forme $X^k P_0(X)$ (avec $k+d \leq n$) donc d'après 29 $X^k P_0(X)$ est élément de $\text{Ker } f$ donc $S(X) P_0(X)$ aussi.

- 31 D'après la question 25 le noyau de f_3 est l'ensemble de polynômes de la forme $c(X^3-1)$ avec c dans $\mathbb{C}$. Comme tout élément du noyau de f appartient à $\mathbb{C}_3[X]$ les noyaux de f et f_3 coïncident et on retrouve le résultat du 30c (ici $d=3$ $n=3$ et $P_0(X)=X^3-1$).

V

- 32 g a la même matrice que f_2 car c' est la matrice de la même base canonique.

- 33 Pour tout $(U(X), V(X))$ de $\mathbb{R}_2[X]^2$ alors $\langle U(X), V(X) \rangle$ appartient à $\mathbb{R}$.
 $\langle V(X), U(X) \rangle = V(1)U(1) + V'(1)U'(1) + V''(1)U''(1) = \langle V(X), U(X) \rangle$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
 Soit $U(X)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ $V_1(X)$ et $V_2(X)$ deux autres éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ Soit α de $\mathbb{R}$.
 $\langle U(X), \alpha V_1(X) + V_2(X) \rangle = U(1)(\alpha V_1(1) + V_2(1)) + U'(1)(\alpha V_1'(1) + V_2'(1)) + U''(1)(\alpha V_1''(1) + V_2''(1))$
 $= \alpha(U(1)V_1(1) + U'(1)V_1'(1) + U''(1)V_1''(1)) + U(1)V_2(1) + U'(1)V_2'(1) + U''(1)V_2''(1)$
 $= \alpha \langle U(X), V_1(X) \rangle + \langle U(X), V_2(X) \rangle$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite donc à gauche par symétrie donc bilinéaire.

Pour tout $U(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ $\langle U(X), U(X) \rangle = U(1)^2 + U'(1)^2 + U''(1)^2 \geq 0$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive
 $\langle U(X), U(X) \rangle = 0 \Leftrightarrow U(1)^2 = U'(1)^2 = U''(1)^2 = 0 \Leftrightarrow U(1) = U'(1) = U''(1) = 0$ donc si et seulement si 1 est racine de U avec une multiplicité supérieure ou égale à 1 la seule possibilité est que $U(X) = 0$ car $\deg(U(X)) \geq 2$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

- 34 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A est symétrique et ${}^t A = A$ donc $A \times {}^t A = A \times A = I_3$ donc est bien orthogonale.

FIN

