1. **Question préliminaire.** Soit $\mathrm{R} > 0$. Soit $n \geqslant 1$. Je pose $u_n = \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}\mathrm{R}^n$.

   On a $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{pn+p}{pn}\right)^r \times \dfrac{\mathrm{R}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(pn+i)}$

   or $\dfrac{pn+p}{pn} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(pn+i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

   ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $0 < 1$. D'où selon d'Alembert la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   Ainsi $\boxed{\text{la série entière } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n \text{ a pour rayon de convergence } +\infty}$

   Soit $z \in \mathbb{C}$. En prenant $\mathrm{Z} = z^p$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\mathrm{Z}^n$ converge d'après ce qui précède

   donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}$ est convergente.

   Ainsi $\boxed{\text{la série entière } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn} \text{ a aussi pour rayon de convergence } +\infty}$

   Autre méthode pour le premier résultat : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\left|\dfrac{(pn)^r}{(pn)!} z^n\right| = \dfrac{(pn)^r}{(pn)!}\left(|z|^{1/p}\right)^{pn}$

   Or par croissance comparée la suite $\left(\dfrac{\mathrm{N}^r\left(|z|^{1/p}\right)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}\right)_{\mathrm{N}\geqslant 0}$ converge vers 0

   donc la suite extraite $\left(\dfrac{(pn)^r}{(pn)!}|z|^n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 et donc la suite $\left(\dfrac{(pn)^r}{(pn)!} z^n\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée

   On arrive à la même conclusion avec le lemme d'Abel.

A. Equivalence entre $(\mathrm{H}_{r,p})$ et $(\mathrm{H}_{r,1})$ lorsque $r > 0$

2. La fonction φ_x est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$.
   Soit $t > 1$. On a $\varphi_x'(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-r}(t-1)^{r-1} = t^{-r}(t-1)^{r-1}\left[(1-r)(t-1) + rt\right]$
   donc $\varphi_x'(t) = t^{-r}(t-1)^{r-1}(t-1+r)$
   donc $t - 1 + r = 0 \Leftrightarrow t = 1 - r$ or $1 - r < 1 \leqslant t$
   Ainsi $\varphi_x'(t) > 0$
   donc φ_x est strictement croissante sur $[1, +\infty[$
   De plus $\varphi_x(1) = -x$ et quand $t \longrightarrow +\infty$, $\varphi_x(t) \sim t \longrightarrow +\infty$
   ainsi φ_x réalise une bijection entre $[1, +\infty[$ et $[-x, +\infty[$
   donc $\boxed{\varphi_x \text{ s'annule en un unique élément de } [1, +\infty[\text{ que l'on note } t_x}$

   et $\boxed{\text{pour } t \geqslant 1 \text{ on a : } \varphi_x(t) > 0 \Longleftrightarrow t > t_x \text{ et } \varphi_x(t) < 0 \Longleftrightarrow 1 \leqslant t < t_x}$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n(x) > 0$ et et $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\left[\dfrac{(n+1)^r x}{n+1} - n^r\right]$

   donc $u_{n+1}(x) - u_n(x) = -\dfrac{x^n(n+1)^{r-1}}{n!}\varphi_x(n+1)$ où $n + 1 \geqslant 1$

Si $n \leqslant n+1 \leqslant \lfloor t_x \rfloor \leqslant t_x$, on a donc $\varphi_x(n+1) \leqslant 0$ et $u_{n+1}(x) \geqslant u_n(x)$
Si $n \geqslant \lfloor t_x \rfloor$ alors $n+1 \geqslant t_x$, on a donc $\varphi_x(n+1) \geqslant 0$ et $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$
ainsi $\boxed{\text{la suite finie } (u_n(x))_{0\leqslant n\leqslant \lfloor t_x \rfloor} \text{ est croissante et que la suite infinie } (u_n(x))_{n\geqslant \lfloor t_x \rfloor} \text{ est décroissante}}$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x \geqslant 1-\alpha$, on a $\varphi_x(x+\alpha) = (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x$.

   Quand $x \longrightarrow +\infty$, on a $(x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r = x\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r$
   donc $(x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha)^r = x\left(1+(1-r)\frac{\alpha}{x}+o(1/x)\right)\left(1+r\frac{\alpha-1}{x}+o(1/x)\right)$
   ainsi $(x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha)^r = x\left(1+(1-r)\frac{\alpha}{x}+r\frac{\alpha-1}{x}+o(1/x)\right) = x+(\alpha-r\alpha+r\alpha-r)+o(1)$
   donc $\varphi_x(x+\alpha) = \alpha - r + o(1)$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_x(x+\alpha) = \alpha - r}$
   Soit $\varepsilon > 0$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_x(x+r+\varepsilon) = \varepsilon$
   ce qui nous fournit $\mathrm{A}_1 > 1$ tel que $\forall x \geqslant \mathrm{A}_1,\ \varphi_x(x+r+\varepsilon) \geqslant \varepsilon/2$
   donc selon les variation de φ_x, on a $\forall x \geqslant \mathrm{A}_1,\ x+r+\varepsilon \geqslant t_x$
   et on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_x(x+r-\varepsilon) = -\varepsilon$
   ce qui nous fournit $\mathrm{A}_2 > 1$ tel que $\forall x \geqslant \mathrm{A}_2,\ x+r+-\varepsilon \leqslant t_x$ de façon analogue.
   En prenant $\mathrm{A} = \max(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$, on a $\forall x \geqslant \mathrm{A},\ -\varepsilon \leqslant x+r-t_x \leqslant \varepsilon$
   On vient de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \geqslant 1,\ \forall x \geqslant 1,\ x \geqslant \mathrm{A} \Longrightarrow |x+r-t_x| \leqslant \varepsilon$$

   Ainsi $\boxed{t_x - x - r \text{ tend vers 0 lorsque } x \to +\infty}$

4. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Quand $x \to +\infty$, on a $\lfloor x \rfloor \to +\infty$ donc $\lfloor x \rfloor + k > 0$

   donc $\lfloor x \rfloor + k \in \mathbb{N}^*$ pour x au voisinage de $+\infty$
   de plus $u_{\lfloor x \rfloor+k}(x) = \dfrac{(\lfloor x \rfloor+k)^r}{(\lfloor x \rfloor+k)!}x^{\lfloor x \rfloor+k} > 0$ et $\dfrac{u_{\lfloor x \rfloor+k+1}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor+k}(x)} = \left(\dfrac{\lfloor x \rfloor+k+1}{\lfloor x \rfloor+k}\right)^r \times \dfrac{x}{\lfloor x \rfloor+k+1}$
   or $\dfrac{\lfloor x \rfloor+k+1}{\lfloor x \rfloor+k} = 1 + \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor+k} \to 1$
   et $0 < x+k \leqslant \lfloor x \rfloor+k+1 \leqslant x+k+1$ pour x au voisinage de $+\infty$
   donc $\dfrac{x}{x+k+1} \leqslant \dfrac{x}{\lfloor x \rfloor+k+1} \leqslant \dfrac{x}{x+k}$
   d'où $\dfrac{x}{\lfloor x \rfloor+k+1} \to 1$ selon les gendarmes et ainsi $\dfrac{u_{\lfloor x \rfloor+k+1}(x)}{u_{\lfloor x \rfloor+k}(x)} \to 1$
   donc $u_{\lfloor x \rfloor+k+1}(x) \sim u_{\lfloor x \rfloor+k}(x)$ lorsque $x \to +\infty$
   On vient de montrer que $\forall p \in \mathbb{Z},\ u_{\lfloor x \rfloor+p+1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor+p}(x)$ puis par récurrences immédiates :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{Z},\ u_{\lfloor x \rfloor+p+m}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor+p}(x) \ \text{ et } \ u_{\lfloor x \rfloor+p-m}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor+p}(x)$$

   Finalement : $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ u_{\lfloor x \rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)}$ en prenant $p = k$ et $m = |k|$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\displaystyle\sum_{i=\lfloor x \rfloor-n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) = \sum_{j=0}^{n} u_{\lfloor x \rfloor-n+j}(x)$.
   $u_{\lfloor x \rfloor-n+j}(x) \sim u_{\lfloor x \rfloor}(x)$ ainsi $u_{\lfloor x \rfloor-n+j}(x) = u_{\lfloor x \rfloor}(x) + o\left(u_{\lfloor x \rfloor}(x)\right)$

En sommant n fois (n ne dépend pas de x), on a $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_{\lfloor x\rfloor-n+j}(x) = \sum_{j=0}^{n} u_{\lfloor x\rfloor}(x) + o\left(u_{\lfloor x\rfloor}(x)\right)$

donc $\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) - nu_{\lfloor x\rfloor}(x) = u_{\lfloor x\rfloor}(x) + o\left(u_{\lfloor x\rfloor}(x)\right)$

d'où $\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) - nu_{\lfloor x\rfloor}(x) \sim u_{\lfloor x\rfloor}(x)$

or $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_p(x) > 0$

Par théorème sur le signe des équivalents, on a pour x au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) - nu_{\lfloor x\rfloor}(x) > 0$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \text{ au voisinage de } +\infty,\ \displaystyle\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \geqslant nu_{\lfloor x\rfloor}(x)}$

5. **Méthode 1 :** Soit $\varepsilon > 0$; il existe une entier naturel n tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.

   Pour ce n, la question précédente donne, pour x assez grand : on a $x > n+1$ et

$$0 \leqslant u_{\lfloor x\rfloor} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor u_i(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} \frac{i^r}{i!}x^i \leqslant \frac{x^r}{n}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} \frac{i^r}{i!}x^i \leqslant \frac{x^r \mathrm{e}^x}{n} \leqslant \varepsilon x^r \mathrm{e}^x$$

   Ainsi $u_{\lfloor x\rfloor} = o\left(x^r \mathrm{e}^x\right)$ quand $x \to +\infty$.

   Méthode 2 : Quand $x \to +\infty$, je note $\mathrm{N} = \lfloor x\rfloor + 1$

   de sorte que $1 \leqslant x \leqslant \mathrm{N} \leqslant 1 + x$ et $\mathrm{N} \sim x$ et $\mathrm{N} \to \infty$ comme en 4.

   On a $u_{\mathrm{N}}(x) = \dfrac{\mathrm{N}^r}{\mathrm{N}!}x^{\mathrm{N}} \sim \dfrac{x^r \mathrm{e}^{\mathrm{N}}}{\sqrt{2\pi\mathrm{N}}\mathrm{N}^{\mathrm{N}}}x^{\mathrm{N}}$ d'après Stirling et car $\mathrm{N} \sim x$ or

$$0 \leqslant \frac{x^r \mathrm{e}^{\mathrm{N}}}{\sqrt{2\pi\mathrm{N}}\mathrm{N}^{\mathrm{N}}}x^{\mathrm{N}} = x^r \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{N}-x}}{\sqrt{2\pi\mathrm{N}}}\left(\frac{x}{\mathrm{N}}\right)^{\mathrm{N}} \leqslant x^r \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{2\pi\mathrm{N}}}$$

   or $\dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{2\pi\mathrm{N}}} \to 0$ donc $u_{\lfloor x\rfloor+1}(x) = o(x^r \mathrm{e}^x)$

En utilisant la question précédente, on obtient, on conclut que

$$\boxed{\text{pour tout entier relatif } k,\ u_{\lfloor x\rfloor+1}(x) \sim u_{\lfloor x\rfloor}(x) \sim u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) = o(x^r \mathrm{e}^x) \text{ quand } x \to +\infty}$$

On a $t_x - x - r \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ d'après 3 ce qui nous fournit $\mathrm{A} > 0$ tel que $\forall x \geqslant \mathrm{A},\ -1/2 \leqslant t_x - x - r \leqslant 1/2$

Soit $x \geqslant \mathrm{A}$. On a $x + r - 1/2 \leqslant t_x \leqslant x + r + 1/2$.

d'où $\lfloor x\rfloor + \lfloor r\rfloor - 1/2 \leqslant t_x \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor r\rfloor + 2 + 1/2$

ainsi $\lfloor x\rfloor + \lfloor r\rfloor - 1 \leqslant \lfloor t_x\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor r\rfloor + 2$

donc $\lfloor r\rfloor - 1 \leqslant \lfloor t_x\rfloor - \lfloor x\rfloor \leqslant \lfloor r\rfloor + 2$

donc $\boxed{\mathrm{M}_x = u_{\lfloor t_x\rfloor}(x) = u_{\lfloor x\rfloor+i}(x) \text{ avec } i \text{ entier compris entre } \lfloor r\rfloor - 1 \text{ et } \lfloor r\rfloor + 2}$

d'où $0 \leqslant \mathrm{M}_x \leqslant \displaystyle\sum_{i=\lfloor r\rfloor-1}^{\lfloor r\rfloor+2} u_{\lfloor x\rfloor+i}(x)$ car les $u_{\lfloor x\rfloor+i}(x) > 0$

or $\displaystyle\sum_{i=\lfloor r\rfloor-1}^{\lfloor r\rfloor+2} u_{\lfloor x\rfloor+i}(x) = 4\,o(x^r\mathrm{e}^x) = o(x^r\mathrm{e}^x)$

On peut conclure que $\boxed{\mathrm{M}_x = o(x^r\mathrm{e}^x)}$

6. Soit $x>0$. On a $\displaystyle\mathrm{S}_{r,1}(zx) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)z^n$.

Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{n^r}{n!}x^n z^n = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x)\left(\mathrm{D}_{n+1}-\mathrm{D}_n\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x)\mathrm{D}_{n+1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x)\mathrm{D}_n$

donc après changement d'indice et car $u_0(x)=0$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{n^r}{n!}x^n z^n = \sum_{p=2}^{\mathrm{N}+1} u_{p-1}(x)\mathrm{D}_p - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x)\mathrm{D}_n = u_{\mathrm{N}}(x)\mathrm{D}_{\mathrm{N}+1} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{D}_n(u_{n-1}(x)-u_n(x))$$

Or $\displaystyle|u_{\mathrm{N}}(x)\mathrm{D}_{\mathrm{N}+1}| = \frac{\mathrm{N}^r x^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}\left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} z^k\right| \leqslant \frac{\mathrm{N}^r x^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\left|z^k\right| \leqslant \frac{\mathrm{N}^r x^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}\times(\mathrm{N}+1)$

Ainsi en faisant comme en 1 et avec les gendarmes, on a $u_{\mathrm{N}}(x)\mathrm{D}_{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{n^r}{n!}x^n z^n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} u_n(x)\mathrm{D}_{n+1}$ converge de même somme :

$$\boxed{\mathrm{S}_{r,1}(zx) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}x^n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{D}_n(u_{n-1}(x)-u_n(x))}$$

On a donc $\displaystyle\mathrm{S}_{r,1}(zx) = -\sum_{n=1}^{\lfloor t_x\rfloor}\mathrm{D}_n(u_n(x)-u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x\rfloor+1}^{+\infty}\mathrm{D}_n(u_{n-1}(x)-u_n(x))$

En utilisant les variations de la suite $(u_n(x))_n$,

on a donc $n\geqslant\lfloor t_x\rfloor+1 \Rightarrow u_{n-1}(x)-u_n(x)\geqslant 0$ et $n\leqslant\lfloor t_x\rfloor \Rightarrow u_n(x)-u_{n-1}(x)\geqslant 0$ puis

$$|\mathrm{S}_{r,1}(zx)| \leqslant \sum_{n=1}^{\lfloor t_x\rfloor}|\mathrm{D}_n|\left(u_n(x)-u_{n-1}(x)\right) + \sum_{n=\lfloor t_x\rfloor+1}^{+\infty}|\mathrm{D}_n|\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)$$

Comme la suite $(u_n(x))_n$ converge vers 0,

alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant\lfloor t_x\rfloor+1}(u_{n-1}(x)-u_n(x))$ converge de somme $u_{\lfloor t_x\rfloor} = \mathrm{M}_x$ d'après le lien suite série

De plus pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\mathrm{D}_n = \frac{1-z^n}{1-z}$ car $z\neq1$ d'où $\displaystyle|\mathrm{D}_n| \leqslant \frac{|1|+|z|^n}{|1-z|} \leqslant \frac{2}{|1-z|}$

donc $\displaystyle|\mathrm{S}_{r,1}(zx)| \leqslant \sum_{n=1}^{\lfloor t_x\rfloor}\frac{2}{|1-z|}\left(u_n(x)-u_{n-1}(x)\right) + \sum_{n=\lfloor t_x\rfloor+1}^{+\infty}\frac{2}{|1-z|}(u_{n-1}(x)-u_n(x)) = \frac{2}{|1-z|}\mathrm{M}_x + \frac{2}{|1-z|}\mathrm{M}_x$

Par conséquent $\displaystyle\boxed{|\mathrm{S}_{r,1}(zx)| \leqslant \frac{4\mathrm{M}_x}{|1-z|}}$

Ainsi $\mathrm{S}_{r,1}(zx) = \mathrm{O}(\mathrm{M}_x)$ lorsque $x\to+\infty$, ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathrm{S}_{r,1}(zx) = o(x^r\mathrm{e}^x)}$

7. Soit $x\in\mathbb{R}$.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{S}_{r,1}(\zeta^k x) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}\zeta^{kn}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(\zeta^n)^k\right)\frac{n^r}{n!}x^n$

Or pour $n \in \mathbb{N}$, si $p|n$, on a $\zeta^n = 1$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(\zeta^n)^k = p$

si $n \not\equiv 0\,[p]$, alors $\zeta^n \neq 1$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(\zeta^n)^k = \frac{1-\zeta^{pn}}{1-\zeta^n} = 0$ car $\zeta^p = 1$

La série étant absolument convergente, on peut réordonner la somme (sommation par paquets) et la ré-indexer

$\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{S}_{r,1}(\zeta^k x) = \sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\,[p]}}^{+\infty} 0 + \sum_{m=1}^{+\infty} p\frac{(pm)^r}{(pm)!}x^{pm}$

On a bien montré que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{S}_{r,1}(\zeta^k x) = p\mathrm{S}_{r,p}(x)}$

On suppose que $(\mathrm{H}_{r,1})$ est vrai on a donc

$$\mathrm{S}_{r,1}(\zeta^0 x) = \mathrm{S}_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r\mathrm{e}^x = \frac{x^r\mathrm{e}^x}{1}$$

de plus pour $k \in [\![1, k-1]\!]$, on a $\zeta^k \neq 1$ et $|\zeta^k| = 1$ donc $\mathrm{S}_{r,1}(\zeta^k x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^r\mathrm{e}^x\right)$ selon 6

Par somme, on a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{S}_{r,1}(\zeta^k x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r\mathrm{e}^x$

d'où $\mathrm{S}_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^r\mathrm{e}^x}{p}$ ce qui nous donne $(\mathrm{H}_{r,p})$

<u>Réciproquement</u> si on suppose $(\mathrm{H}_{r,p})$, alors en utilisant 6, on obtient $(\mathrm{H}_{r,1})$

On en déduit que $\boxed{\text{les énoncés } (\mathrm{H}_{r,p}) \text{ et } (\mathrm{H}_{r,1}) \text{ sont équivalents}}$

B. Une démonstration probabiliste

8. Soit $\alpha > 0$. Soit $x > 0$. On a $\mathrm{X}_x \sim \mathcal{P}(x)$ donc d'après le cours $\mathbb{E}(\mathrm{X}_x) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_x) = x < +\infty$ de plus $\alpha x^{2/3} > 0$,

   Alors selon Pafnouti Tchebichev, on a $\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_x - \mathbb{E}(\mathrm{X}_x)| \geqslant \alpha x^{2/3}\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(\mathrm{X}_x)}{\alpha^2 x^{4/3}}$

   donc $\mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| > \alpha x^{2/3}) \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2 x^{1/3}}$

   d'où $\boxed{\mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| > \alpha x^{2/3}) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty}$ selon les gendarmes

9. Soit $x > 1$. Soit $\omega \in \Omega$. On a

   Si $\mathrm{Z}_x(\omega) \geqslant 1 - x^{-1/3}$, alors $\mathrm{A}_x(\omega) = 0$

   et si $\mathrm{Z}_x(\omega) < 1 - x^{-1/3}$, alors comme $\mathrm{Z}_x(\omega) = \dfrac{\mathrm{X}_x(\omega)}{x} > 0$

   on a $\mathrm{A}_x(\omega) = \mathrm{Z}_x(\omega)^r \leqslant \left(1 - x^{-1/3}\right)^r$

   Ainsi $\forall\omega \in \Omega,\ 0 \leqslant \mathrm{A}_x(\omega) \leqslant \left(1 - x^{-1/3}\right)^r$ et $0 \leqslant \mathrm{B}_x(\omega) \leqslant \left(1 + x^{-1/3}\right)^r$ (analogue)

   Les variables aléatoires $\boxed{\mathrm{A}_x \text{ et } \mathrm{B}_x \text{ sont donc d'espérances finies}}$ car bornées

   de plus on a $0 \leqslant \mathrm{A}_x \leqslant \left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x < 1 - x^{-1/3})}$ en reprenant la disjonction de cas d'où $0 \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{A}_x) \leqslant \left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x < 1 - x^{-1/3})}\right)$

or $\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ et $\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x < 1 - x^{-1/3})}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{Z}_x < 1 - x^{-1/3})$ (loi de Bernoulli)

or $(\mathrm{Z}_x < 1 - x^{-1/3}) = (\mathrm{X}_x < x - x^{2/3}) \subset \left(|\mathrm{X}_x - x| > x^{2/3}\right)$

donc $0 \leqslant \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x < 1 - x^{-1/3})}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_x - x| > x^{2/3}\right)$

en utilisant la question précédente, on a $\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_x - x| > x^{2/3}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

ainsi en appliquant les gendarmes et par produit $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{A}_x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

On remarque que $\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{1}_{(|\mathrm{X}_x - x| \leqslant x^{2/3})} \leqslant \mathrm{B}_x = \mathbf{1}_{(|\mathrm{Z}_x - 1| \leqslant x^{-1/3})} \mathrm{Z}_x^r \leqslant \left(1 + x^{-1/3}\right)^r \mathbf{1}_{(|\mathrm{X}_x - x| \leqslant x^{2/3})}$ donc

$$\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| \leqslant x^{2/3}) \leqslant \mathrm{B}_x \leqslant \left(1 + x^{-1/3}\right)^r \mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| \leqslant x^{2/3})$$

or $\mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| \leqslant x^{2/3}) = 1 - \mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| > x^{2/3})$ et
lorsque $x \longrightarrow +\infty$, on a $\mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| > x^{2/3}) \longrightarrow 0$ donc $\mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| \leqslant x^{2/3}) \longrightarrow 1$
Ainsi $\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| \leqslant x^{2/3}) \longrightarrow 1$ et $\left(1 + x^{-1/3}\right)^r \mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| \leqslant x^{2/3}) \longrightarrow 1$
On trouve que $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{B}_x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1}$ selon les gendarmes

10. Soit $x > 0$. Soit $\omega \in \Omega$.
Si $\mathrm{X}_x(\omega) \leqslant \mathrm{N} - 1$ alors $\mathrm{Y}_{\mathrm{N},x}(\omega) = 0$
et si $\mathrm{X}_x(\omega) \geqslant \mathrm{N}$, alors $\mathrm{Y}_{\mathrm{N},x}(\omega) = \dfrac{\mathrm{X}_x(\omega)!}{(\mathrm{X}_x(\omega) - \mathrm{N})!} \mathbf{1}_{(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3})}(\omega) \geqslant 0$
donc $\mathrm{Y}_{\mathrm{N},x} \geqslant 0$, on calcule alors dans $[0, +\infty]$ avec la formule de transfert :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_{\mathrm{N},x}\right) = \sum_{\substack{n=\mathrm{N} \\ n > x + x^{2/3}}}^{+\infty} \frac{n!}{(n - \mathrm{N})!} \mathbb{P}(\mathrm{X}_x = n) = \sum_{\substack{n=\mathrm{N} \\ n > x + x^{2/3}}}^{+\infty} \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{(n - \mathrm{N})!} = \sum_{\substack{k=0 \\ k + \mathrm{N} > x + x^{2/3}}}^{+\infty} \frac{x^{k+\mathrm{N}} \mathrm{e}^{-x}}{k!}$$

donc par réunion dénombrable disjointe :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_{\mathrm{N},x}\right) = x^{\mathrm{N}} \sum_{\substack{k=0 \\ k > x + x^{2/3} - \mathrm{N}}}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_x = k) = x^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{k=0 \\ k > x + x^{2/3} - \mathrm{N}}}^{+\infty} (\mathrm{X}_x = k)\right)$$

d'où $\boxed{x^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3} - \mathrm{N}) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}_{\mathrm{N},x}) \in \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{Y}_{\mathrm{N},x} \text{ est bien d'espérance finie}}$

Pour x au voisinage de $+\infty$, on a $\mathrm{N} \leqslant \dfrac{x^{2/3}}{2}$ car $\dfrac{x^{2/3}}{2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
On a donc $\left(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3} - \mathrm{N}\right) \subset \left(\mathrm{X}_x - x > \dfrac{1}{2} x^{2/3}\right) \subset \left(|\mathrm{X}_x - x| > \dfrac{1}{2} x^{2/3}\right)$
or d'après 8 $\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_x - x| > \frac{1}{2} x^{2/3}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
d'où selon les gendarmes $\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3} - \mathrm{N}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{\mathrm{N},x}) = o(x^{\mathrm{N}}) \text{ quand } x \to +\infty}$

11. Pour $k \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$, on considère le polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{T}]$: $\mathrm{P}_k = \prod_{i=1}^{k-1}(\mathrm{T} - i)$. et on a $\deg \mathrm{P}_k = k - 1$.

    Ainsi la famille $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\mathrm{N})$ est une famille échelonnée en degrés de $\mathbb{R}_{\mathrm{N}-1}[\mathrm{T}]$
    elle est donc libre composée de N polynômes et $\dim \mathbb{R}_{\mathrm{N}-1}[\mathrm{T}] = \mathrm{N}$
    donc $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\mathrm{N})$ est une base de $\mathbb{R}_{\mathrm{N}-1}[\mathrm{T}]$

    ce qui nous fournit $a_1, \ldots, a_\mathrm{N} \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{T}^{\mathrm{N}-1} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k \mathrm{P}_k$

    donc $\mathrm{T}^\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(\mathrm{T} - i)$

    Soit $x > 0$. On a donc $\mathbf{1}_{(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3})}\mathrm{X}_x^\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k \mathbf{1}_{(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3})} \prod_{i=0}^{k-1}(\mathrm{X}_x - i)$

    ainsi $\boxed{\mathbf{1}_{(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3})}\mathrm{X}_x^\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k \mathrm{Y}_{k,x}}$

    On a $\mathbf{1}_{(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3})}\mathrm{Z}_x^\mathrm{N} = \mathbf{1}_{(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3})} \dfrac{\mathrm{X}_x^\mathrm{N}}{x^\mathrm{N}} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{a_k}{x^\mathrm{N}} \mathrm{Y}_{k,x}$

    Par linéarité, $\mathbf{1}_{(\mathrm{X}_x > x + x^{2/3})}\mathrm{Z}_x^\mathrm{N}$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}\mathrm{Z}_x^\mathrm{N}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{k,x})}{x^\mathrm{N}}$

    or $\forall k \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$, $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{k,x}) = o(x^k) = o(x^\mathrm{N})$ donc $\boxed{\text{la limite de } \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}\mathrm{Z}_x^\mathrm{N}) \text{ est 0 lorsque } x \to +\infty}$

12. Soit $\omega \in \Omega$. On a $\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}(\omega)\mathrm{Z}_x^r(\omega) \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{Z}_x(\omega) > 1$
    donc dans tous les cas on a $0 \leqslant \mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}(\omega)\mathrm{Z}_x^r(\omega) \leqslant \mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}(\omega)\mathrm{Z}_x^{\lfloor r \rfloor + 1}(\omega)$
    En appliquant ce qui précède à $\mathrm{N} = \lfloor r \rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ on a par croissance de l'espérance :

    $$0 \leqslant \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}\mathrm{Z}_x^r) \leqslant \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}\mathrm{Z}_x^\mathrm{N})$$

    puis avec les gendarmes : $\boxed{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}\mathrm{Z}_x^r) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty}$

    On a $\mathrm{Z}^r = \mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}\mathrm{Z}_x^r + \mathrm{A}_x + \mathrm{B}_x$
    car $\Omega = (\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3}) \bigcup (\mathrm{Z}_x < 1 - x^{-1/3}) \bigcup (|\mathrm{Z}_x - 1| < x^{-1/3})$ (réunion disjointe)
    ainsi par linéarité : $\mathbb{E}(\mathrm{Z}_x^r) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{(\mathrm{Z}_x > 1 + x^{-1/3})}\mathrm{Z}_x^r) + \mathbb{E}(\mathrm{A}_x) + \mathbb{E}(\mathrm{B}_x)$
    On en déduit que $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Z}_x^r) \to 1 \text{ quand } x \to +\infty}$ à l'aide de 9

    On a selon la formule de transfert $\mathbb{E}(\mathrm{Z}_x^r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^r}{x^r}\mathbb{P}(\mathrm{X}_x = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^r x^n \mathrm{e}^{-x}}{x^r n!} = \dfrac{\mathrm{S}_{r,1}(x)}{\mathrm{e}^x x^r}$

    Ainsi $\dfrac{\mathrm{S}_{r,1}(x)}{\mathrm{e}^x x^r} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ ce qui donne $\boxed{\text{la validité de l'énoncé } \mathrm{H}_{r,1}}$

13. Soit $x > 0$.

    Par un changement d'indice sur les sommes partielles, on a $\mathrm{S}_{r,p}(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} x^{np}$

    Pour $n \in \mathbb{N}$, je pose $a_n = \dfrac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}$ et $b_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{(pn)^{r-p}}{(pn)!}$

de sorte que $\mathrm{S}_{r-p,p}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{np}$ et $\mathrm{S}_{r,p}(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{np}$

La série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ (i) et pour $n \geqslant 1$, on a $b_n > 0$ (iii)

et $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(p(n+1))^r (pn)!}{(pn)^{r-p}(p(n+1))!} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{r-p} \dfrac{(p(n+1))^p}{(pn+p)\times(pn+p-1)\times\cdots\times(pn+1)}$

donc quand $n \to +\infty$, on a $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{r-p} \to 1$ et $\dfrac{(p(n+1))^p}{(pn+p)\times(pn+p-1)\times\cdots\times(pn+1)} \sim \dfrac{(pn)^p}{(pn)^p} = 1$

donc $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$ et ainsi $a_n \sim b_n$ (ii)

donc d'après le lemme de comparaison asymptotique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

donc par composition : $\dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{np}}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{np}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Ainsi $\boxed{\mathrm{S}_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^p \mathrm{S}_{r-p,p}(x)}$

Comme les multiplications et les divisions sont compatibles avec l'équivalence asymptotique,

on en déduit que $\boxed{(\mathrm{H}_{r,p}) \text{ implique } (\mathrm{H}_{r-p,p})}$

On a montré que $(\mathrm{H}_{r,p})$ est vraie pour tout $r > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$

On suppose maintenant que $r \leqslant 0$ je note alors $r' = r + (1 - \lfloor r/p \rfloor)\, p$ de sorte que $r' > 0$

Ainsi $(\mathrm{H}_{r',p})$ est vraie (établie après 12)

Par récurrence immédiate, on montre alors que $(\mathrm{H}_{r'-kp,p})$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$

En particulier vraie pour $k = 1 - \lfloor r/p \rfloor \in \mathbb{N}$ or $r' - (1 - \lfloor r/p \rfloor)\, p = r$

On conclut à la $\boxed{\text{validité de } (\mathrm{H}_{r,p}) \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}}$

C. Application à l'équation d'Airy

14. **Question préliminaire.** Soit un entier $n > 1$.

On a $v_n - v_{n-1} = \ln(n) + x(\ln(n) - \ln(n-1)) - \ln(x+n) = -x \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$

donc quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $v_n - v_{n-1} = -x\left(-\dfrac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\dfrac{x}{n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{x^2}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

or la série $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ converge

donc par comparaison à une série à termes positifs $\boxed{\text{la série } \sum (v_n - v_{n-1}) \text{ converge absolument donc converge}}$

Par le lien suite série la suite $(v_n)_n$ converge ce qui nous fournit ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Or pour $n \geqslant 2$, on a $v_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) + \ln(n^x) - \ln\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right) = \ln\left(\dfrac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}\right)$

donc quand $n \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{n^x n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)} \longrightarrow \mathrm{e}^{\ell}$ car exp est continue sur $\mathbb{R}$

comme $\mathrm{e}^{\ell} \neq 0$, on a $\dfrac{n^x n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)} \sim \mathrm{e}^{\ell}$

Comme $\mathrm{e}^{\ell} > 0$, on en déduit l'existence d'un réel $\Gamma(x) = \mathrm{e}^{\ell} > 0$ vérifiant la *formule d'Euler* :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n}(x+k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^x n!}{\Gamma(x)}}$$

15. L'équation (Ai) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients continus et celui de y'' ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{il existe une unique solution } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ au problème de Cauchy : } f \text{ solution de (Ai) vérifiant } f(0)=1 \text{ et } f'(0)=0}$$

16. **Analyse** On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout réel t, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ Par dérivations d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence (rayon infini), on a $f'(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ et $f''(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

On a $tf(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = \sum_{p=3}^{\infty} a_{p-3} t^{p-2}$ et $f''(t) = 2a_2 + \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

d'où $0 = f''(t) - tf(t) = 2a_2 + \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left[n(n-1)a_n - a_{n-3}\right] t^{n-2}$

Comme c'est valable pour tout réel t, par unicité du développement en série entière on a $2a_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $a_n = \dfrac{a_{n-3}}{n(n-1)}$.

On a également $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = 0$

Par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ n \not\equiv 0\ [3] \Longrightarrow a_n = 0$

Si $3|n$, on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$ et on a la relation de récurrence, $a_{3(k+1)} = \dfrac{a_{3k}}{3k(3k-1)}$

donc $a_{3k} = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} 3i(3i-1)}$ par récurrence immédiate avec la convention $a_0 = 1$ (produit vide)

Synthèse : On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = 0$ si $3 \not| n$ et $a_{3k} = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} 3i(3i-1)}$

On pose f somme de la série entière $\displaystyle\sum_n a_n t^n$ en travaillant avec des sommes partielles, on montre que cette série à même rayon que la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_{3k} t^{3k}$

Soit $t > 0$. on pose $u_k = a_{3k} t^{3k}$ et on a $u_k > 0$ de plus $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{1}{3k(3k-1)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $0 < 1$

donc d'après D'Alembert la série $\sum_k u_k$ converge. Ainsi le rayon est infini et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En remontant les calculs, f est bien solution au problème précédent

Conclusion : On a $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{3k}}{\prod_{i=1}^{k} 3i(3i-1)}}$

17. Soit $n \geqslant 1$. On a $a_{3n} = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n} 3i(3i-1)}$

Or $\prod_{i=1}^{n} 3i(3i-1) = 3^n n! \prod_{i=1}^{n}(3i-1) = 3^n n! \prod_{k=0}^{n-1}(3k+2) = 3^{2n} n! \prod_{k=0}^{n-1}(k+2/3)$

Quand $n \to +\infty$, $\prod_{k=0}^{n-1}(k+2/3) \sim \dfrac{(n-1)^{3/2}(n-1)!}{\Gamma(2/3)}$

donc $\boxed{a_{3n} \sim \dfrac{\Gamma(2/3)n}{9^n n!(n-1)^{3/2} n!} \sim \dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) n^{1/3}}{9^n (n!)^2} \text{ lorsque } n \to +\infty}$

La formule de Stirling donne :

$$\boxed{a_{3n} \sim n^{-1/6} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} \text{ lorsque } n \to +\infty}$$

18. On utilise le lemme de comparaison asymptotique des séries entières (avec la variable t^3 !!!) et l'équivalent qui précède

Après intervention de $\mathrm{S}_{-1/6,2}$ et des calculs pénibles, certains trouvent $\mathrm{C} = \dfrac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}}$

Fin du problème : ouf !