

Tous les exercices sont solutionnés

Topologie 1

Exercice 1

Définition :

E un evn. N_1 et N_2 deux normes sur E .

N_1 est dite *dominée* par N_2 si et seulement si

$$\exists \alpha \geq 0, N_1 \leq \alpha N_2$$

N.B : Il est clair que deux normes sont équivalentes si et ssi l'une est dominée par l'autre.

Dans la suite $E = C([0, 1], \mathbb{K})$.

Pour $f \in E$, on notera :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

Montrer que :

- 1) $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$ mais ne sont pas équivalentes.
- 2) $\|\cdot\|_2$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$ mais ne sont pas équivalentes.
- 3) $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_2$ mais ne sont pas équivalentes.

Exercice 2

Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ on note :

$$\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right), \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2}$$

Montrer que :

- 1) $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes sur $M_n(\mathbb{R})$
- 2) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$
- 3) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$
- 4) Soit $\lambda \in S_p(A)$.

Montrer que $|\lambda| \leq \|A\|_\infty$

Exercice 3

- 1) Notons $E = \{f \in C^2([0, \pi], \mathbb{R}) / f(0) = f'(\pi) = 0\}$.
Notons aussi pour tout $f \in E$:

$$N_1(f) = \|f + f''\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$$

- i) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E .

ii) Montrer qu'elles sont équivalentes.

indice :

Soit $g \in C([0, \pi], \mathbb{R})$. On verra vers la fin de l'année que **la solution** sur $[0, \pi]$ de l'équation différentielle $(y'' + y = g)$ avec les conditions initiales $(y(0) = y'(0) = 0)$ est la fonction y définie par :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad y(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$$

2) Mêmes questions pour N_1 et N_2 définies cette fois-ci sur $E = C^1([0, \pi], \mathbb{R})$ par :

$$N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Exercice 4

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

- 1) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $N(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
Vérifier que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad N(AX) \leq \|A\|N(X)$$

- 3) En déduire que $\|A\| = \sup_{N(X)=1} N(AX)$

Exercice 5

Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

- 1) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Etudier la convergence pour chacune de ces deux normes de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} X^n$$

- 3) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 6

- 1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Supposons que $(AB)^n \rightarrow O$.
Montrer que $(BA)^n \rightarrow O$.
- 2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
Supposons que $A^n \rightarrow P$ et $B^n \rightarrow Q$. Montrer alors que P et Q commutent.

- 3) Soit $(A_n)_n$ une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Supposons que $A_n \rightarrow A$ et $A_n^{-1} \rightarrow B$.
Montrer que A est inversible et préciser A^{-1}
- 4) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Supposons que $A^n \rightarrow B$.
Montrer que B est la matrice d'un projecteur.
- 5) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable vérifiant $S_p(A) \subset]-1, 1[$. Montrer que $A^n \rightarrow 0$.
- 6) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Supposons que $A^n \rightarrow B$,
où $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Montrer que $B = 0$

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Ex 1

1) i) $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$; En effet.

Soit $f \in E$.

$$\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 |f(t)| dt}_{= \|f\|_2} \leq \underbrace{\int_0^1 \|f\|_\infty dt}_{= \|f\|_\infty}$$

ii) $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$ ne sont pas équivalentes; En effet.

À retenir: On considère la suite $f_n: t \mapsto t^n$; $n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a } \|f_n\|_\infty = 1 \text{ et } \|f_n\|_2 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Donc $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0 \text{ pour } \|\cdot\|_2 \\ \text{Mais} \\ f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ pour } \|\cdot\|_\infty \end{array} \right.$; D'où $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$ ne sont pas équivalentes

2) i) $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$; En effet.

Soit $f \in E$; on a: $(\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq \|f\|_\infty)$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1], |f(t)|^2 \leq \|f\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^2 dt = \|f\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}}_{= \|f\|_2} \leq \|f\|_\infty$$

ii) $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$ ne sont pas équivalentes; En effet.

Reconsidérons $f_n: t \mapsto t^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ et } \|f_n\|_\infty = \dots = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

~~(C'est faux)~~

et on conclut que $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

3) i) $\|f\|_2 \leq \|f\|_2$; En effet. Soit $f \in E$, on a:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt} \leq \underbrace{\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}}_{= \|f\|_2} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_0^1 1^2 dt}}_{= 1} \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz})$$

3) ii) $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalents ; en effet :

En une seule fois, considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$; $f_n : t \mapsto t^n$.

$$\|f\|_2 = \frac{2}{n+1} \text{ et } \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Ici ça ne va pas marcher comme plus haut ; on a $\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{n} 0 \text{ par } \|\cdot\|_2 \\ \text{et aussi} \\ f_n \xrightarrow{n} 0 \text{ par } \|\cdot\|_2 \end{array} \right.$

→ Raisonnons par l'absurde et supposons que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalents.

$$\text{Alors } (\exists \beta > 0, \|\cdot\|_2 \leq \beta \|\cdot\|_2)$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_2 \leq \beta \|f_n\|_2)$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \leq \frac{\beta}{n+1})$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\beta} \leq \frac{\sqrt{2n+2}}{n+1})$$

Par passage à la limite, on obtient : $\boxed{\frac{1}{\beta} \leq 0}$ ce qui est absurde.

Ex 2

1) $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes (OK) (voir cours)

2) Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$; m. que $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$.

$$\text{On a } \|AB\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |(AB)_{ij}| \right).$$

Par l'absurde, il suffit de m. que :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^n |(AB)_{ij}| \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

Soit alors $1 \leq i \leq n$; on a :

$$\sum_{j=1}^n |(AB)_{ij}| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |A_{ik}| \cdot |B_{kj}| \right) \quad (\text{inég-triang})$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(|A_{ik}| \cdot \sum_{j=1}^n |B_{kj}| \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(|A_{ik}| \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |B_{kj}| \right)}_{\leq \|B\|_\infty} \right) \quad (\text{par déf de } \|B\|_\infty)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^n (|A_{nk}| \cdot \|B\|_{\infty}) \\
&= \|B\|_{\infty} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n |A_{nk}| \right)}_{\leq \|A\|_{\infty}} \quad (\text{encore par déf de } \|A\|_{\infty}) \\
&\leq \|B\|_{\infty} \cdot \|A\|_{\infty} \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

3) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$; M. que $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$:

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \|AB\|_2 &= \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} (AB)_{ij}^2} \\
&= \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)^2}
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n B_{kj}^2 \right)$$

$$\text{Donc : } \|AB\|_2^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right) \times \left(\sum_{k=1}^n B_{kj}^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&\triangle \\
&\text{voir cléf ci-dessous} \quad \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right) \right)}_{= \|A\|_2^2} \times \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n B_{kj}^2 \right) \right)}_{= \|B\|_2^2}
\end{aligned}$$

Cléf à ne pas oublier :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j$$

Ainsi : $\|AB\|_2^2 \leq \|A\|_2^2 \cdot \|B\|_2^2$ CQFD

4) Soit $\lambda \in S_p(A)$. Montr. que $|\lambda| \leq \|A\|_\infty$:

On a $\lambda \in S_p(A) \Leftrightarrow (\exists X \neq 0, AX = \lambda X)$; (Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$)

$$AX = \lambda X \Rightarrow \left(\forall 1 \leq i \leq n, \lambda x_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} x_k \right)$$

Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. (une $|x_{i_0}| > 0$ car $X \neq 0$)

$$\text{Donc } |\lambda x_{i_0}| = \left| \sum_{k=1}^n A_{i_0 k} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |A_{i_0 k}| \underbrace{|x_k|}_{\leq |x_{i_0}|} \leq |x_{i_0}| \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n |A_{i_0 k}|}_{\leq \|A\|_\infty}$$

En simplifiant enfin car $|x_{i_0}| > 0$, on obtient :

$$(|\lambda| \leq \|A\|_\infty)$$

Ex 3 1) i) N_2 norme sur E ; En l'abr. :

(Fin Ex 2)

$$(a) N_2(\lambda f) = \|\lambda(f + f'')\|_\infty \xrightarrow{\text{car } \|\cdot\|_\infty \text{ norme}} |\lambda| \|f + f''\|_\infty = |\lambda| N_2(f)$$

$$(b) N_2(f+g) = \|(f+f'') + (g+g'')\|_\infty \leq \underbrace{\|f+f''\|_\infty}_{N_2(f)} + \underbrace{\|g+g''\|_\infty}_{N_2(g)}$$

(c) Supp. que $N_2(f) = 0$. $\wedge$ -pe $f = 0$

On a $\|f+f''\|_\infty = 0$, donc $f+f'' = 0$ (car $\|\cdot\|_\infty$ norme)

f est solution de l'éq. diff $y'' + y = 0$.

$$\Rightarrow (\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, \pi], f(x) = A \cos(x) + B \sin(x))$$

$$\text{Et On a : } \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Donc } (\forall x \in [0, \pi], f(x) = 0)$$

$$\text{c'ad } f = 0$$

B) N_2 norme sur E , en eff. :

$$(a) N_2(\lambda f) = |\lambda| N_2(f) \quad (0 \leq \lambda)$$

$$(b) N_2(f+g) = \|f+g\|_\infty + \|f''+g''\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|g''\|_\infty$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{= N_2(f)} \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty \\ & \xrightarrow{= N_2(g)} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|g''\|_\infty \\ & \xrightarrow{= N_2(f)} \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|g\|_\infty + \|g''\|_\infty \end{aligned}$$

4/10

$$(c) N_2(f) = 0 \Rightarrow \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = 0 \quad (\text{somme nulle de deux réels positifs})$$

$$\Rightarrow f=0 \quad (\text{car } \|\cdot\|_\infty \text{ norme})$$

ii) N_1 et N_2 sont équivalentes; ~~unif.~~

$$(a) N_1 \leq N_2 : \text{clair}$$

$$(B) \text{ Cherchons } w > 0 \text{ tel que : } (N_2 \leq w N_1)$$

Soit $f \in E$.

$$f \text{ est solution de : } \begin{cases} y'' + y = f'' + f \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

D'après l'indice, on a donc :

$$\left(\forall x \in [0, \pi], f(x) = \int_0^x \sin(x-t) (f''(t) + f(t)) dt \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall x \in [0, \pi], |f(x)| \leq \int_0^x \underbrace{|\sin(x-t)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|f''(t) + f(t)|}_{\leq \|f'' + f\|_\infty} dt \right)$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, \pi], |f(x)| \leq \int_0^x \|f'' + f\|_\infty dt \leq \int_0^\pi \underbrace{\|f'' + f\|_\infty}_{N_2(f)} dt = \pi \cdot N_2(f)$$

$$\text{Donc } \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)| \leq \pi \cdot N_2(f)$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \pi \cdot N_2(f)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|f''\|_\infty}_{\text{inég. triang.}} \leq \underbrace{\|f'' + f\|_\infty}_{N_2(f)} + \underbrace{\|f\|_\infty}_{\leq \pi \cdot N_2(f)} \leq (\pi + 1) N_2(f)$$

$$\text{Donc } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty \leq (2\pi + 1) N_1(f)$$

$$\leq \pi \cdot N_2(f) \leq (\pi + 1) N_2(f)$$

$$(w = 2\pi + 1 \text{ convient})$$

% :

$$N_1 \leq N_2 \leq (2\pi + 2) N_1$$

2) a) N_2 norme ; en effet

(i) $N_2(\lambda f) = |\lambda| N_2(f)$ (claire)

(ii) $N_2(f+g) \leq N_2(f) + N_2(g)$: (claire)

(iii) Supp. que $N_2(f) = 0$ - $\Rightarrow$ p.e $f = 0$

On a $N_2(f) = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$ (Somme nulle de nombres réels positifs)

$\Rightarrow (f(0) = 0 \text{ et } f' = 0)$

$f' = 0 \Rightarrow (f \text{ constante sur } [0, \pi])$

et $f(0) = 0 \Rightarrow (\forall x \in [0, \pi], f(x) = 0)$ (Q.F.D)

(b) N_2 norme : (claire) vu que $\|f\|_\infty$ norme.

(c) N_1 et N_2 sont équivalentes ; en effet :

(i) $N_1 \leq N_2$; en effet : Soit $f \in E$, on a :

$$N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N_2(f)$$

(ii) Trouvons $w > 0$ tel que : $(N_2 \leq w N_1)$

$(\|f\|_\infty \leq ??)$

On a : $(\forall x \in [0, 1], f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall x \in [0, 1], |f(x)| &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt \\ &\leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \\ &\leq |f(0)| + \int_0^1 \|f'\|_\infty dt \\ &\leq |f(0)| + \|f'\|_\infty \end{aligned}$$

Donc $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \|f\|_\infty \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$

$\Rightarrow N_2(f) \leq |f(0)| + 2\|f'\|_\infty \leq 2(|f(0)| + \|f'\|_\infty) = 2 N_1(f)$

Donc $N_2(f) \leq 2 N_1(f)$

$w = 2$ convient

Fin Ex 3

6/10

Ex 4) 1) (voir cours)

2) Montrer que $N(AX) \leq \|A\| \cdot N(X)$

! Il suffit de montrer que : $(\forall i \in \{1, n\}, |(AX)_i| \leq \|A\| \cdot N(X))$

Soit alors $1 \leq i \leq n$, on a :

$$|(AX)_i| = \left| \sum_{k=1}^n A_{ik} x_k \right| \quad (\text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \cdot |x_k| \leq N(X) \quad \text{par définition de } N(X)$$

$$\leq N(X) \cdot \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \leq \|A\| \quad \text{par définition de } \|A\|$$

$$\leq N(X) \cdot \|A\| \quad \text{CQFD}$$

3) On déduit que $\sup_{N(X)=1} (N(AX)) = \|A\|$:

On a : $(\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } N(X)=1, N(AX) \leq \|A\|)$ (selon 2°)

Pour montrer que $\sup_{N(X)=1} (N(AX)) = \|A\|$, il suffit de trouver

! $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $N(X_0)=1$ et que $N(AX_0) = \|A\|$.

$$\text{On a } \|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

$$\text{Soit } p \in \{1, n\} \text{ tel que } \|A\| = \sum_{j=1}^n |a_{pj}|.$$

$$\text{On veut un } X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1 \\ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{pj}| \end{cases}$$

$N(AX_0) \qquad \|A\|$

! Si on arrive à trouver $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vérifiant $\begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1 \\ \left| \sum_{j=1}^n a_{pj} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{pj}| \end{cases}$ alors c'est fini.

Pour avoir $\left| \sum_{j=1}^n a_{pj} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{pj}|$, on s'arrangera a' ce que

$a_{pj} x_j$ sera positif, comme ça, $\left| \sum_{j=1}^n a_{pj} x_j \right|$ sera $\sum_{j=1}^n a_{pj} x_j$.

Le problème se réduit à $\sum_{j=1}^n a_{pj} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{pj}|$.

On veillera pour cela que pour tout $1 \leq j \leq n$, $a_{pj} x_j = |a_{pj}|$

Avec $\begin{cases} x_j = 1 \text{ si } a_{pj} > 0 \\ x_j = -1 \text{ si } a_{pj} \leq 0 \end{cases}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ convient

Fin Ex 4

Ex 5

1) i) $N_2(P) = \|P\|_\infty$; c'est une norme d'après le cours

ii) N_1 norme sur $\mathbb{R}[X]$; ε_n ~~est~~ $\frac{1}{n!}$

$$(a) N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda \cdot P^{(k)}(0)| = |\lambda| \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0) = |\lambda| N_2(P)$$

(b) $N_1(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q)$; juste l'inég triangulaire

(c) Supp que $N_2(P) = 0$ et m. pr $P = 0$

$$\text{On a } N_2(P) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = 0$$

$$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k)}(0) = 0) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Somme nulle de} \\ \text{réels positifs} \end{array} \right)$$

$$\Delta \Rightarrow P = 0$$

$$\text{Car } P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{P^{(k)}(0)}{k!}}_{=0} X^k \quad \left(\begin{array}{l} \text{Formule de Taylor pour les} \\ \text{les polynômes} \end{array} \right) \quad \Delta$$

$$2) P_n = \frac{1}{n!} X^n$$

(i) $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $k > n+1$ et si $k \leq n-1$.

$$\text{si } k=n; P_n^{(n)}(X) = \frac{1}{n!} \cdot n! = (n-1)! \Rightarrow P_n^{(n)}(0) = (n-1)!$$

$$\text{Alors : } N_1(P_n) = (n-1)! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

8/10

D'où la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ Diverge pour la norme N_1 .

(ii) Pour la norme N_2 :

$$\forall n \geq 1, N_2(P_n) = \sup_{-1 \leq t \leq 1} \left| \frac{t^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'où $(P_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 pour la norme N_2

3) N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, car la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ converge pour l'une et diverge pour l'autre.

Fin Ex 5

Ex 6

1) $\text{Supp } (AB)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Or car $(BA)^n = B \cdot \underbrace{(AB)^{n-1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \cdot A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B \cdot 0 \cdot A = 0$

2) Supp. que $\begin{cases} AB=BA \\ A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \\ B^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q \end{cases} \quad ; \quad A \text{ -pe } PQ=QP$

On a $\left(\lim_n A^n = P \text{ et } \lim_n B^n = Q \right)$ alors $\lim_n (A^n B^n) = (PQ)$

D'autre part, $(\forall n, A^n B^n = B^n A^n)$ car $AB=BA$.

$$\Rightarrow \lim_n B^n A^n = \lim_n A^n B^n = PQ$$

$$= QP ; \text{ car } B^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q \text{ et } A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$$

D'où $PQ=QP$

3) On a $\left(A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \text{ et } A_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B \right) \Rightarrow A_n \cdot A_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$

Et on a $\forall n, A_n \cdot A_n^{-1} = I_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I_p$; D'où $\boxed{AB = I_p}$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = B$

4) On a $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = B$; et M. q. $B^2 = B$ (ie la metrique d'un projecteur)

$$\text{On a } \lim_n A^n = B \Rightarrow \lim_n (A^n)^2 = B^2 \\ \Rightarrow \boxed{\lim_n A^{2n} = B^2}$$

D'autre part, $\lim_n A^n = B \Rightarrow \lim_n A^{2n} = B$; car c'est une suite extraite de $(A^n)_n$
 Donc $B^2 = B$

5) $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$; où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ car A diagonalisable

D'autre part, $D^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_p^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{diag}(0, \dots, 0) = 0$

car : $(\forall 1 \leq i \leq p, |\lambda_i| < 1)$ et donc $\lambda_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Or $(\forall n, A^n = P D^n P^{-1})$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} D^n = 0$

$$\text{Donc } \lim_n A^n = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0$$

6) On a ${}^t A = -A$ et $A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$.

$$\text{Donc } {}^t(A^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} {}^t B$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} ({}^t A)^n A^n = {}^t B}$$

$${}^t(A^n) = ({}^t A)^n = (-A)^n = (-1)^n A^n$$

En considérant les deux suites extraites paires et impaires, on a :

$$\underbrace{\lim_n A^{2n}}_{= B; \text{ suite extraite de } (A^n)_n} = {}^t B \quad \text{et} \quad \underbrace{\lim_n -A^{2n+1}}_{= -B; \text{ même raison}} = {}^t B$$

et $A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$

$$\text{Donc } (B = {}^t B \quad \text{et} \quad -B = {}^t B)$$

$$\Rightarrow B = -B ; \text{ c'ad } \boxed{B = 0}$$

Fin Ex 6

Fin TD de Topologie 1

10/10