Exercice 3

Considérons la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $f'(x)$.

2) Calculer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = f(x^2)$.
Montrer que

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

4) Déduire que ce qui précède l'intégrale de *Gauss*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Solution

a)

Rappels

Théorème 1 : (Classe $\mathcal{C}^1$)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$; $(x,t) \longmapsto f(x,t)$.

Si
1) $\forall\, t \in I,\ x \longmapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* J
2) $\forall\, x \in J,\ t \longmapsto f(x,t)$ *est CPM et intégrable sur* I
3) $\forall\, x \in J,\ t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est CPM sur* I
4) *Il existe* φ *CPM et intégrable sur* I *telle que :* $\left(\forall (x,t) \in J \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \preceq \varphi(t)\right)$
(*hypothèse de domination*)

Alors
1) $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* J
2) $\forall\, x \in J,\ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$ (*dite formule de Leibniz*)

NB :

Pour l'hypothèse de domination, il suffit de l'avoir sur tout segment inclus dans J. c-à-d :
Pour tout $[a,b] \subset J$. Il existe φ CPM et intégrable sur I telle que :

$$\left(\forall (x,t) \in [a,b] \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \preceq \varphi(t)\right)$$

Notons $F(x,t) = \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour tout $x \in [0,+\infty[$ et $t \in [0,1]$.

On montrera que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ (même de classe C^1).

Il suffit de vérifier les points suivants :

1) $\forall t \in [0,1]$, $x \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$

2) $\forall x \in [0,+\infty[,\ t \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.

3) $\forall x \in [0,+\infty[,\ t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -e^{-x(1+t^2)}$ est CPM sur $[0,1]$.

4) Montrons qu'il existe φ CPM et intégrable sur $[0,1]$ telle que :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times [0,1],\ \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Pour : 1) $\forall t \in [0,+\infty[,\ x \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$

C'est claire.

Pour : 2) $\forall x \in [0,+\infty[,\ t \mapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Soit $x \in [0,+\infty[$.

La CPM est claire.

L'intégrabilité sur $[0,1]$ est aussi claire car continue sur un segment.

Pour : 3) $\forall x \in [0,+\infty[,\ t \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -e^{-x(1+t^2)}$ est CPM sur $[0,+\infty[$.

C'est claire.

Pour 4) :

Soit $(x,t) \in [0,+\infty[\times [0,1]$. On a ;

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-e^{-x(1+t^2)}\right| = e^{-x(1+t^2)} \leqslant 1 = \varphi(t)$$

Et $\varphi : t \mapsto 1$ est CPM et intégrable sur le segment $[0,1]$.

D'où f est de classe C^1 dans $[0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \ f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt$$

b) Calculer $f(0)$ et $\lim_{+\infty} f$.

i) $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$

Piste 1 : (La piste 2 en bas est plus rapide)

Rappel :

III) Limites

Théorème (Intervertion limite-intégrale)

Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$; où I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit a une extrémité de I.

Si
1) $\forall x \in J$, $t \longmapsto f(x,t)$ *est CPM sur I*
2) $\forall t \in I$, $\lim_{x \to a} f(x,t) = l(t)$ *avec l est CPM sur I*
3) *Il existe φ CPM et intégrable sur I telle que :* $(\forall (x,t) \in J \times I, \ |f(x,t)| \preceq \varphi(t))$ (*hypothèse de domination*)

Alors $\lim_{x \to a}\left(\displaystyle\int_I f(x,t)dt\right) = \displaystyle\int_I \left(\lim_{x \to a} f(x,t)\right) dt$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

Et on espère intervertir et écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^1 \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right) dt$$

Pour le faire, on va vérifier les points suivants :

1) $\forall x \in [0,+\infty[$, $t \longmapsto \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.

2) $\forall t \in [0,1]$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} = \ell(t)$, avec ℓ fonction CPM sur $[0,1]$.

3) Il existe φ CPM et intégrable sur $[0,1]$ telle que :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times [0,1], \left| \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right| \leqslant \varphi(t)$$

Pour 1) ; c'est claire.

Pour 2) : $\forall t \in [0,1]$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} = 0$

et $t \longmapsto 0$ est CPM sur $[0,1]$.

Pour 3) :

Soit $(x,t) \in [0,+\infty[\times [0,1]$, on a :

$$\left| \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right| \leqslant 1 = \varphi(t)$$

et φ est bien CPM et intégrable sur $[0,1]$.

Enfin ;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^1 \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right) dt = \int_0^1 0 = 0$$

fin piste 1

Piste 2

Soit $x \geqslant 0$.

$$0 \leqslant f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$$

D'autre part :

$$\forall t \in [0,1], \quad e^{-x(1+t^2)} = e^{-x} \cdot e^{-xt^2} \leqslant e^{-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4} e^{-x}$$

D'où :

$$\left(\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{4} e^{-x} \right)$$

Et d'après gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

fin piste 2

c) On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$. Montrer

$$g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} \quad ?$$

Notons $h : x \longmapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$.

h est dérivable sur $[0,+\infty[$ car f et $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ le sont.

Et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a :

$$h'(x) = g'(x) + 2\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)'}_{= e^{-x^2}}$$

$$= 2x\, f'(x^2) + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad (g(x) = f(x^2))$$

Et on a : $\forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt$

D'où :

$$h'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$= -2x\, e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2}\, dt + 2\, e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

$$h'(x) = -2x\, e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2}\, dt + 2\, e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

$\boxed{\text{Cas 1 : Si } x > 0}$

$$\int_0^1 e^{-(xt)^2}\, dt \underset{s = xt}{\overset{\text{chang de var :}}{=\!=\!=\!=}} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-s^2}\, ds$$

D'où

$$= \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Ainsi :

$$h'(x) = -2x\, e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2}\, dt + 2\, e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

$$= 0$$

$\boxed{\text{Cas 2 : Si } x = 0}$

$h'(0) = 0$ est claire.

On a donc : $(\forall x \in [0, +\infty[,\ h'(x) = 0)$

$$\Rightarrow (\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0, +\infty[,\ h(x) = C)$$

On a $C = h(0) = g(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$. Car $\begin{cases} h : x \longmapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \\ g(x) = f(x^2) \end{cases}$

D'où :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

d) Conclure $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On a : $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \forall x \in [0,+\infty[,\ f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

Par passage à la limite $(x \to +\infty)$, et du fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On tire que : $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Fin Exercice 3

Exercice 4

Considérons la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$

1) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

2) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F''(x)$.

3) En déduire la valeur de $F(0)$ puis celle de l'intégrale de *Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Solution

a) i) M que F est continue sur $[0,+\infty[$.

Notons $f(x,t) = e^{-xt} \cdot \frac{1-\cos t}{t^2}$

Rappel

Théorème : (Continuité)

A une partie d'un *evn* de dimension finie. I intervalle de $\mathbb{R}$.

$f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$; $(x,t) \longmapsto f(x,t)$.

Si
1) $\forall t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ *est continue sur* A
2) $\forall x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ *est CPM sur* I
3) *Il existe* φ *CPM et intégrable sur* I *telle que :* $(\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \preceq \varphi(t))$ (*hypothèse de domination*)

Alors $\left(g : x \longmapsto \int_I f(x,t)dt \text{ est continue sur } A \right)$

NB : (Un cas fréquent)

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit que l'hypothèse de domination soit vérifiée sur tout segment [a,b] de A.

Pour montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$, il suffit alors de vérifier les conditions suivantes :

1) $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto e^{-xt} \cdot \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2) $\forall x \in [0,+\infty[$, $t \mapsto e^{-xt} \cdot \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue par morceaux (CPM) sur $]0,+\infty[$.

3) Soit $[a,b] \subset [0,+\infty[$. Montrons qu'il existe φ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$, telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[, \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Pour 1) et 2) ; C'est claire.

Pour 3) : Soit $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$, on a :

$$|f(x,t)| = e^{-xt} \cdot \frac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2} = \varphi(t).$$

φ est CPM sur $]0,+\infty[$, car φ est continue.

φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, en effet :

Au voisinage de 0 :

φ est prolongeable par continuité en 0 ; $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = \frac{1}{2}$, donc

φ intégrable sur $]0,1]$.

Au voisinage de $+\infty$:

$\left(\forall t \in [1,+\infty[, \ |\varphi(t)| \leqslant \frac{2}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}\,dt$ converge

d'où φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

1), 2) et 3) garantissent la continuité de F sur $[0,+\infty[$.

---

a) ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$; en effet :

Méthode 1

$$\forall x > 0, \ F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

$\forall x > 0$, on a :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \overbrace{\sup_{t \in]0,+\infty[} \left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)}^{=C} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$$

Notons que $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} = 0$, donc $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est bornée sur $]0,+\infty[$.

$$\Rightarrow \forall x>0,\quad 0 \leq F(x) \leq C\left(\frac{e^{-xt}}{-x}\right)_0^{+\infty} = \frac{C}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{C}{x} = 0$, alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$.

Méthode 2

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$$

On aimerait avoir $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-xt} \cdot \frac{1-\cos t}{t^2}\right) dt$.

Pour pouvoir intervertir, il suffit de vérifier les conditions suivantes :

1) $\forall x \in [0,+\infty[$, $t \mapsto e^{-xt} \frac{1-\cos t}{t^2}$ CPM sur $]0,+\infty[$.

2) $\forall t \in]0,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-xt} \frac{1-\cos t}{t^2} = l(t)$, avec l CPM sur $]0,+\infty[$.

3) Il existe φ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \left| e^{-xt} \frac{1-\cos t}{t^2} \right| \leq \varphi(t)$$

Pour 1), c'est claire.

Pour 2) :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \lim_{x\to+\infty} e^{-xt} \frac{1-\cos t}{t^2} = 0$$

et $l : t \mapsto 0$ est CPM sur $]0,+\infty[$.

Pour 3) : $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a :

$$\left| e^{-xt} \frac{1-\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1-\cos t}{t^2} = \varphi(t)$$

Et φ est bien CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$, c'est vu ci-dessus.

De 1), 2) et 3), on tire que :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-xt}\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}\right)dt = \int_0^{+\infty} 0\, dt = 0$$

b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $F''(x)$.

On montrera que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

Pour cela, il suffit de montrer les conditions suivantes :

1) $\forall t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

On notera $f(x,t) = e^{-xt}\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}$.

2) $\forall x\in]0,+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ et $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont CPM et intégrables sur $]0,+\infty[$.

3) $\forall x\in]0,+\infty[$, $t\mapsto\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est CPM sur $]0,+\infty[$.

4) $\forall [a,b]\subset]0,+\infty[$, il existe φ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que : $\forall (x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$.

Pour 1) : c'est claire

Pour 2) : Soit $x\in]0,+\infty[$.

On a $t\mapsto f(x,t) = e^{-xt}\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}$ est CPM sur $]0,+\infty[$, et elle y est intégrable, c'est pareil à ce qu'on a fait en haut pour $t\mapsto\frac{1-\cos t}{t^2}$.

Et $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\cdot\frac{1-\cos t}{t}$ est CPM sur $]0,+\infty[$, et intégrable

Car :

Au voisinage de 0 : Prolongeable par continuité en 0.

Au voisinage de $+\infty$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}\cdot\frac{1-\cos t}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

« Car $x>0$ et $(1-\cos t)$ bornée »

Pour 3) : C'est claire.

Pour 4) : Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Soit $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$, On a :

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = e^{-xt}(1-\cos t) \leq 2e^{-at} = \varphi(t)$$

et φ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$, car :

Au voisinage de 0 : Prolongeable par continuité en 0.

Au voisinage de $+\infty$:

$e^{-at} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

De 1), 2), 3) et 4) on tire que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-\cos t)\,dt$$

---

c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

c)i) $F(0) = ?$

On a : $\forall x > 0$, $F''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-\cos t)\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{it}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{+\infty}\right)$$

Or $\lim_{t\to+\infty} e^{(i-x)t} = \lim_{t\to+\infty} e^{it} \cdot e^{-xt} = 0$

Car $\lim_{t\to+\infty} e^{-xt} = 0$ et que $t \mapsto e^{it}$ est bornée.

Ainsi : $F''(x) = \frac{1}{x} - Re\left(\frac{1}{x-i}\right)$

$= \frac{1}{x} - Re\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right)$

D'où : $\forall x>0,\ F''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

$\Rightarrow F'(x) = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$\left(\exists C_1 \in \mathbb{R},\ \forall x>0,\ F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1\right)$ (Ω)

$\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = 0$; en effet :

$\forall x>0,\ |F'(x)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} -e^{-xt}\frac{(1-\cos t)}{t}\,dt\right| \leqslant \underbrace{\sup_{t>0}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)}_{=C} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$

$\Rightarrow \left(\forall x>0,\ |F'(x)| \leqslant \frac{C}{x}\right)$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{C}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = 0$

Ainsi, par passage à $\lim\limits_{x\to+\infty}$ dans (Ω), et du fait que

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) = 0$, on a : $C_1 = 0$

D'où $\forall x>0,\ F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$\Rightarrow F(x) = \int \ln x\,dx - \frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)\,dx$

$= x\ln x - x - \frac{1}{2}\int x' \ln(x^2+1)\,dx$

$\overset{IPP}{=} x\ln x - x - \frac{1}{2}\left(x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx\right)$

$= x\ln x - x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx$

$= x\ln x - x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + x - \arctan(x) + C_2$

D'où :

$$\left(\exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall x>0,\ F(x) = \frac{x}{2}\left(\ln x^2 - \ln(x^2+1)\right) - \arctan(x) + C_2\right) (\Sigma)$$

$$\frac{x}{2}\left(\ln x^2 - \ln(x^2+1)\right) = \frac{-x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-x}{2}\times\frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}\left(\ln x^2 - \ln(x^2+1)\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Et du fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, alors par passage à $\lim\limits_{x\to+\infty}$ dans (Σ), on tire que $C_2 = \frac{\pi}{2}$

Ainsi :

$$\left(\forall x>0,\ F(x) = \frac{x}{2}\left(\ln x^2 - \ln(x^2+1)\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Enfin, par passage à $\lim\limits_{x\to 0}$, et du fait que F est continue en 0, on tire que $F(0) = \frac{\pi}{2}$

---

c) ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$; en effet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)'}{t}\,dt$$

$$\overset{IPP}{=} \underbrace{\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)}{t^2}\,dt}_{=F(0)}$$

$$= F(0)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Fin Exercice 4

Exercice 6 (Fonction gamma)

Considérons la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

1) Montrer que Γ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

2) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe.
Indice : Vous pouvez utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Solution

a) i) Montrons que Γ est définie sur $]0,+\infty[$:

Soit $x>0$. Mque $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ Converge.

$t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est d'abord Continue sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0 :

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{et} \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt \text{ Converge car } 1-x<1.$$

Au voisinage de $+\infty$:

$t^{x-1}e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, par croissance Comparée.

Et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ CV, donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ Converge.

Enfin $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ Converge

a) ii) Γ est Continue sur $]0,+\infty[$; en effet :

Il suffit de montrer les Conditions suivantes :

1) $\forall t>0$, $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est Continue sur $]0,+\infty[$.

2) $\forall x>0$, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est CPM sur $]0,+\infty[$

3) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Montrons qu'il existe φ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$, telle que :

$$\forall (x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[,\ |t^{x-1}e^{-t}|\leq \varphi(t)$$

Pour 1) et 2) : c'est OK,

Pour 3) : Soit $x\in[a,b]$. Soit $t\in]0,+\infty[$.

On a $a-1\leq x-1\leq b-1$.

Alors :

$$\begin{cases} t\leq 1 \Rightarrow t^{x-1}e^{-t}=e^{(x-1)\ln t}e^{-t}\leq e^{(a-1)\ln t}e^{-t}=t^{a-1}e^{-t} \\ t>1 \Rightarrow t^{x-1}e^{-t}\leq t^{b-1}e^{-t} \end{cases}$$

D'où :

$$\forall t>0,\quad t^{x-1}e^{-t}\leq t^{a-1}e^{-t}+t^{b-1}e^{-t}=\varphi(t)$$

φ étant CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions intégrables, d'après a)i).

D'où Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrons Γ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

Posons $\Gamma_1(x,t)=t^{x-1}e^{-t}$, $\forall (x,t)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Il suffit alors de montrer les points suivants :

1) $\forall t\in]0,+\infty[$, $x\mapsto \Gamma_1(x,t)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

2) $\forall x\in]0,+\infty[$, $t\mapsto \Gamma_1(x,t)$ et $t\mapsto \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x,t)$ sont CPM et intégrables sur $]0,+\infty[$.

3) $\forall x\in]0,+\infty[$, $t\mapsto \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x,t)$ est CPM sur $]0,+\infty[$.

4) $\forall [a,b]\subset]0,+\infty[$, il existe φ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\forall (x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x,t)\right|\leq \varphi(t)$$

Pour 1) c'est OK

Pour 2) Ça reste à vérifier que $t \mapsto \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x,t) = \ln t \cdot t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0 :

Mq $\int_0^1 \ln t \cdot t^{x-1} e^{-t} dt$ converge :

On a $\ln t \cdot t^{x-1} e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} \ln t \cdot t^{x-1}$

et $\int_0^1 \ln t \cdot t^{x-1} dt$ converge ; en effet :

$$\ln t \cdot t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x} \cdot (\ln t)^{-1}}.$$

On a $1-x < 1$.

Soit $1-x < \gamma < 1$.

On a $\left\{ \begin{array}{l} t^{\gamma} \cdot t^{x-1} \cdot \ln t = t^{\gamma+x-1} \cdot \ln t \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \\ \text{Car } \gamma+x-1 > 0, \text{ et que la puissance l'emporte sur le logarithme au voisinage de } 0 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow t^{x-1} \ln t \underset{t \to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\gamma}}\right)$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{\gamma}} dt$ converge, car $\gamma < 1$

Alors $\int_0^1 t^{x-1} \ln t \, dt$ converge.

Et donc $\int_0^1 \ln t \cdot t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.

et ainsi $t \mapsto \ln t \cdot t^{x-1} e^{-t}$ intégrable sur $]0,1]$.

Au voisinage de $+\infty$:

$\int_1^{+\infty} \ln t \cdot t^{x-1} e^{-t} dt$ converge, en effet :

$\ln t . t^{x-1} e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, par croissance comparée

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Pour 3) c'est OK

Pour 4) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Soit $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$.

$$\left|\frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x,t)\right| = (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} \leq (\ln t)^2 t^{a-1} e^{-t} + (\ln t)^2 t^{b-1} e^{-t} = \varphi(t)$$

et φ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions intégrables ; L'intégrabilité de chacune ressemble à ce qu'on avait fait pour l'intégrabilité de $t \mapsto \ln t . t^{x-1} e^{-t}$ sur $]0,+\infty[$.

Enfin, de 1), 2), 3) et 4) on conclut que Γ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

C) Mq que $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

D'abord, $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

On a en plus :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ (\ln(\Gamma(x)))'' = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}$$

Alors il suffit de montrer que :

$$\left(\forall x > 0, \ \Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2 \geq 0\right)$$

Càd :

$$\forall x > 0, \ \left(\int_0^{+\infty} \ln t . t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt\right) . \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt\right)$$

Soient $0 < \varepsilon < X$. On a :

$$\left(\int_\varepsilon^X \ln t . t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2 = \left(\int_\varepsilon^X \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\right) . \left((\ln t) . t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\right) dt\right)^2$$

$$\leq \left(\int_{\varepsilon}^{X}\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 dt\right)\cdot\left(\int_{\varepsilon}^{X}\left((\ln t)\cdot t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 dt\right)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

D'où ;

$$\left(\int_{\varepsilon}^{X}\ln t\cdot t^{x-1}e^{-t}dt\right)^2 \leq \left(\int_{\varepsilon}^{X}t^{x-1}e^{-t}dt\right)\cdot\left(\int_{\varepsilon}^{X}(\ln t)^2\cdot t^{x-1}e^{-t}dt\right)$$

En tendant $\varepsilon \to 0$ et $X \to +\infty$ on obtient :

$$\left(\int_{0}^{+\infty}\ln t\cdot t^{x-1}e^{-t}dt\right)^2 \leq \left(\int_{0}^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\right)\cdot\left(\int_{0}^{+\infty}(\ln t)^2\cdot t^{x-1}e^{-t}dt\right)$$

Ce qui est demandé

Fin Exercice 6

Exercice 7 (Fonction gamma)
Considérons la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction Γ.
2) Calculer l'intégrale
$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$
3) i) Justifier que
$$\forall t > 0,\ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$
ii) Montrer enfin que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \Gamma(x)$$

Solution

3) ii) Soit $x > 0$.

(indices) $I_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$

où $f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0,n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$

$\forall t > 0,\ \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}$

$\Rightarrow \forall t > 0,\ \lim_{n\to+\infty}\left(t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) = t^{x-1}e^{-t}$

$\Rightarrow \forall t > 0,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty}\left(t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) = t^{x-1}e^{-t}$

D'où $f_n \xrightarrow[]0,+\infty[]{CS} f$ où $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t) \right) dt$$

$$\overset{?}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} I_n(x)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \right)$$

Car $I_n(x) = \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

Fin Exercice 17