Révision Traiter les exos encadrés

Déterminant

Exercice 1

En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que les déterminants suivants sont nuls :

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix}$; où $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

3) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix}$

Exercice 2

En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, calculer les déterminants suivants, et donner-les sous la forme la plus factorisée possible :

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

3) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & sin(a) & cos(a) \\ 1 & sin(b) & cos(b) \\ 1 & sin(c) & cos(c) \end{vmatrix}$

4) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & cos(a) & cos(2a) \\ 1 & cos(b) & cos(2b) \\ 1 & cos(c) & cos(2c) \end{vmatrix}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer $det(A_x)$ et déterminer les valeurs de x pour lesquelles la matrice A_x est inversible.

Vous pouvez utiliser des opérations élémentaires sur les lignes.

1) $A_x = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$

2) $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

3) $A_x = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$

4) $A_x = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$

5) $A_x = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & x & 4 & 3 \\ 3 & 4 & x & 2 \\ 4 & 3 & 2 & x \end{pmatrix}$

1)

Exercice 4

Soit n un entier naturel impair.

1) Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -I_n$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice anti-symétrique (c-à-d vérifiant ${}^tA = -A$). Montrer que A n'est pas inversible.

2)

Exercice 5

1) Notons $F = (P_1, P_2, P_3)$ où $\begin{cases} P_1 &= 2+3X-X^2 \\ P_2 &= 1+X+X^2 \\ P_3 &= a-X+aX^2 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la famille F est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+ay+6z, 7x+8y+9z)$$

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3)

Exercice 6

Considérons la fonction f définie par le déterminant d'ordre $n \geq 2$ suivant

$$\forall x \in \mathbb{C},\ f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & a+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}$$

Montrer que f est une fonction polynomiale de degré ≤ 1.

Indice : *Vous pouvez effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes (ou lignes), puis développer le déterminant suivant l'une de ses lignes (ou colonnes).*

4)

Exercice 7 (*Déterminant de* ***Vandermonde***)(1735-1796 Paris)
Soit $n \succeq 2$. Soient $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$. On note :

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On se propose de montrer que $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (x_j - x_i)$

(*Résultat à retenir !*).
On raissonera par récurrence sur $n \geq 2$.

A) Initialisation :
Vérifier que la propriété est vraie pour $n = 2$.

B) Hérédité : Soit maintenant $n \succeq 3$. Supposons que la propriété est vraie pour $(n-1)$, et montrons qu'elle est vraie pour n.
Soient alors $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$.

1) Méthode 1 :

a) Par des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \right) V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

b) Conclure.

2) Méthode 2 : Notons $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$

a) Vérifier que l'égalité voulue est vraie si $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas distincts deux à deux.

b) Supposons maintenant qu'ils sont distincts deux à deux.

i) Justifier que $P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Quel est son coéfficient en X^{n-1} ?

ii) Préciser des racines évidentes de P(X).

iii) Justifier la relation

$$P(X) = V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_{n-1})$$

iv) Conclure.