Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires

Exercice 1 [04093] [Correction]
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. On définit une fonction Y par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$$

Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.

Exercice 2 [04094] [Correction]
Soit T une variable aléatoire à valeurs naturelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(T > n) > 0$$

On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$\theta_n = \mathrm{P}\left(T = n \mid T \geq n\right)$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe à panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant présent alors qu'il est actuellement fonctionnel.

a) Justifier
$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0\,;1[$$

b) Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la probabilité $\mathrm{P}(T \geq n)$. En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.

c) Inversement, soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0\,;1[\text{ et } \sum \theta_n \text{ diverge}$$
Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.

Exercice 3 [04128] [Correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $k \in \,]0\,;1[$ vérifiant

$$\mathrm{P}(X = n) = kP(X \geq n)$$

Déterminer la loi de X.

Espérances et variances

Exercice 4 [04018] [Correction]
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a\,;b]$.

a) Montrer que X admet une espérance m et que celle-ci est élément de $[a\,;b]$.
La variable X admet aussi une variance σ^2 que l'on se propose de majorer.
On introduit la variable aléatoire $Y = X - m$ et les quantités
$$t = \sum_{y\geq 0} yP(Y = y), s = \sum_{y\geq 0} y^2\,\mathrm{P}(Y = y) \text{ et } u = \mathrm{P}(Y \geq 0)$$

b) Vérifier
$$t^2 \leq su$$

c) Calculer espérance et variance de Y. En déduire
$$t^2 \leq (\sigma^2 - s)(1 - u)$$

d) En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir
$$t^2 \leq \sigma^2/4$$

e) Conclure
$$\sigma^2 \leq (b - a)^2/4$$

Exercice 5 [04025] [Correction]
Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment à tout ordre $k \leq n$.

Exercice 6 [04026] [Correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que X admet une espérance finie si, et seulement si, la série $\sum \mathrm{P}(X > n)$ converge et qu'alors

$$\mathrm{E}\left(X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left(X > n\right)$$

Exercice 7 [04028] [Correction]
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\} \text{ et } \mathrm{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

a) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négatives de paramètres n et p.

b) En déduire espérance et variance d'un loi binomiale négatives de paramètres n et p.

Exercice 8 [04032] [Correction]
On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $1/2$, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
— il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
— s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
— s'il perd, il double sa mise et rejoue.

a) On suppose la fortune du joueur infinie.
Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.

b) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?

c) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 9 [04085] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $p \in]0\,;1[$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k} p^k$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 10 [04087] [Correction]
Soit X une variable aléatoires réelle discrète admettant une variance σ^2 (avec $\sigma > 0$). Montrer

$$\forall \alpha > 0, \mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| < \alpha\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Exercice 11 [04121] [Correction]
Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de « six » obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de « six » obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$.
La variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ correspond alors au nombre de « six » obtenu après n lancers.

a) Vérifier que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.

c) On définit alors la variable aléatoire

$$T = \min\{n \geq 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\}$$

Déterminer la loi de T.

d) Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci. Calculer cette espérance pour $N = 1$ et $N = 2$.

Exercice 12 [04124] [Correction]
Dans une urne figurent N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). Dans celle-ci on opère des tirages successifs (avec remise) jusqu'à l'obtention d'une série de k boules consécutives identiques ($k \geq 2$). On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note T la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus.

a) Déterminer $\mathrm{P}(T = k)$ et $\mathrm{P}(T = k+1)$.

b) Soit $n \geq 1$, établir

$$\mathrm{P}(T = n + k) = \frac{N-1}{N^k}\mathrm{P}(T > n)$$

c) En déduire que la variable T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 13 [04130] [Correction]
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0\,;1[$ et l'on étudie la première apparition de deux succès consécutifs dans cette suite.

a) Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe $n \geq 2$ vérifiant

$$X_n = X_{n-1} = 1$$

b) On note T la variable aléatoire donnée par

$$T = \min\left\{n \geq 2 \mid X_n = X_{n-1} = 1\right\} \cup \{+\infty\}$$

Calculer $\mathrm{P}(T=2)$, $\mathrm{P}(T=3)$ et exprimer, pour $n \geq 4$, $\mathrm{P}(T=n)$ en fonction de $\mathrm{P}(T=n-1)$ et $\mathrm{P}(T=n-2)$.

c) Justifier que T admet une espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 14 [04019] [Correction]
On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois « face » et une fois « pile ».

a) Montrer qu'il est presque sûr que le jeu s'arrête.

b) On note X le nombre de lancers avant que le jeu cesse.
Montrer que X admet une espérance et déterminer celle-ci.

Covariances

Exercice 15 [04086] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant chacune une variance.
On suppose $\mathrm{V}(X) > 0$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant la quantité

$$\mathrm{E}\left((Y-(aX+b))^2\right)$$

Exercice 16 [04048] [Correction]
Un signal est diffusé via un canal et un bruit vient malheureusement s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S^2 connues. Le bruit est modélisé par une variable B indépendante de S d'espérance nulle et de variance $\sigma_B^2 > 0$. Après diffusion, le signal reçu est $X = S + B$.
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de S *i.e.* tel que l'espérance $\mathrm{E}\left((Y-S)^2\right)$ soit minimale.

Exercice 17 [04047] [Correction]
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles. On appelle matrice de covariance de la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ la matrice

$$\Sigma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$$

a) Soit $X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.
Exprimer la variance de X en fonction de la matrice Σ.

b) En déduire que les valeurs propres de la matrice Σ sont toutes positives.

Lois usuelles

Exercice 18 [04020] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ.
Quelle est la loi suivie par $X + Y$?

Exercice 19 [04021] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 20 [04022] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent des lois géométriques de paramètres p et q.

a) Déterminer $\mathrm{P}(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la loi de $Z = \min(X, Y)$.

c) Observer que la loi de Z est géométrique.

Exercice 21 [04029] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ.
Reconnaître la loi de X sachant $X + Y = n$.

Exercice 22 [04034] [Correction]
Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Pour quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'évènement $(X = n)$ est-elle maximale ?

b) Inversement, n étant fixé, pour quelle valeur du paramètre λ, la probabilité de $(X = n)$ est-elle maximale ?

Exercice 23 [04036] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Calculer

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right)$$

Exercice 24 [04037] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Calculer

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$$

Exercice 25 [04038] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètres p et q.
Calculer l'espérance de $Z = \max(X, Y)$.

Exercice 26 [04045] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la probabilité que la valeur de X soit pair.

Exercice 27 [04088] [Correction]
Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

a) Par quelle loi peut-on modéliser la variable $X_{k+1} - X_k$?

b) En déduire l'espérance de X_N.

Exercice 28 [04115] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p, q \in \left]0\,;1\right[$.
Calculer $\mathrm{P}(X < Y)$.

Exercice 29 [04126] [Correction]
On lance cinq dés. Après ce premier lancers ceux des dés qui ont donné un « As » sont mis de côtés et les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq « As ». On note T la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

a) Calculer $\mathrm{P}(T \le n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

b) En déduire que T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 30 [04127] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et $q > 0$.
Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

Exercice 31 [04129] [Correction]
On souhaite modéliser le nombre d'arrivées de « clients » dans un « service » durant un laps de temps T.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s, t \in \mathbb{R}$ avec $0 \le s \le t$, on note $A(n, s, t)$ l'événement

« il arrive n clients dans l'intervalle de temps de $[s\,; t[$ »

On admet l'existence d'un espace probabilisé permettant d'étudier la probabilité de cet événement en supposant :

(H1) pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ et tous réels $0 \le r \le s \le t$, les événements $A(m, r, s)$ et $A(n, s, t)$ sont indépendants ;

(H2) la probabilité de l'événement $A(n, s, t)$ ne dépend que de n et du réel $t - s$. On note

$$p_n(t) = \mathrm{P}\left(A(n, 0, t)\right)$$

(H3) la fonction p_0 est continue et $p_0(0) = 1$;

(H4) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$$

(H5) on a le développement asymptotique

$$1 - p_0(t) - p_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(p_1(t)\right)$$

Cette dernière hypothèse signifie que, durant un laps de temps minime, la probabilité d'arrivée d'au moins deux clients est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client.

a) Justifier que la fonction p_0 est décroissante et que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, p_0(s+t) = p_0(s)p_0(t)$$

b) Montrer que p_0 est à valeurs strictement positives et qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

c) Justifier

$$p_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} \lambda t + \mathrm{o}(t) \text{ et } \forall n \geq 2, p_n(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}(t)$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$\forall s, t \geq 0, p_n(s+t) = \sum_{k=0}^{n} p_k(s)p_{n-k}(t)$$

En déduire que la fonction p_n est dérivable et

$$\forall t \geq 0, p_n'(t) = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))$$

e) Obtenir l'expression de $p_n(t)$ (on pourra étudier $q_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}p_n(t)$).

f) On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de « clients » arrivant durant le laps de temps $T > 0$. Déterminer la loi de X. Comment interpréter le paramètre λ ?

Loi conjointes, Loi marginales

Exercice 32 [04054] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et $p \in \left]0\,;1\right[$.

a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

b) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 33 [04055] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathrm{P}\left(X = j, Y = k\right) = \frac{a}{j!k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.

b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.

c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 34 [04056] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall j, k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}\left(X = j, Y = k\right) = a\frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.

b) Déterminer les lois marginales de X et Y.

c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

d) Calculer $\mathrm{P}\left(X = Y\right)$.

Exercice 35 [04057] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in \left]0\,;1\right[$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathrm{P}\left(X = k, Y = n\right) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.

b) Déterminer la loi marginale de Y.

c) Sachant

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

Reconnaître la loi de X

d) Les variables X et Y sont elle indépendantes ?

Fonctions génératrices

Exercice 36 [04027] [Correction]
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $1 - p$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

a) Reconnaître la loi de T_1.
b) Déterminer la loi de T_m dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.
c) Exprimer le développement en série entière de
$$\frac{1}{(1-t)^m}$$
d) Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire son espérance.

Exercice 37 [04039] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Calculer
$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right)$$
b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 38 [04040] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$.

a) Calculer
$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right)$$
b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 39 [04044] [Correction]
Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et Y_1 et Y_2 celles associées au deuxième joueur. On étudie donc l'évènement $(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$.

a) Montrer que
$$\mathrm{P}\left(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2\right) = \mathrm{P}\left(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14\right)$$
b) Déterminer la fonction génératrice de la variable à valeurs naturelles
$$Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$$
c) En déduire la valeur de
$$\mathrm{P}\left(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2\right)$$

Exercice 40 [04046] [Correction]
Soit N et $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \dots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose
$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$
a) Établir $G_S(t) = G_N\left(G_X(t)\right)$ pour $|t| \le 1$
b) On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald
$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(X_1)$$

Exercice 41 [04051] [Correction]
Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$. Soit aussi N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes.
On pose
$$X = \sum_{k=1}^{N} X_k \text{ et } Y = \sum_{k=1}^{N} (1 - X_k)$$
a) Pour $t, u \in [-1\,;1]$, exprimer à l'aide de la fonction génératrice de N
$$G(t,u) = \mathrm{E}\left(t^X u^Y\right)$$
b) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.
c) Inversement, on suppose que les variables X et Y sont indépendantes.
Montrer que N suit une loi de Poisson.

Exercice 42 [04024] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Rappeler la fonction génératrice de la variable X.

b) Exploiter celle-ci pour calculer le moment centré d'ordre 3 de la variable X.

Exercice 43 [04091] [Correction]
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.

b) Même question avec $S_m - S_{m-1}$ pour $m \geq 2$.

c) Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m

Exercice 44 [04114] [Correction]
Une urne contient 4 boules rapportant $0, 1, 1, 2$ points. On y effectue n tirages avec remise et l'on note S le score total obtenu.
Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire la loi de S.

Exercice 45 [04117] [Correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs naturelles dont la loi est donnée par

$$\mathrm{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k \text{ (avec } a > 0 \text{ et } p \in \left]0\,;1\right[)$$

Calculer espérance et variance de X.

Applications

Exercice 46 [04049] [Correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{X}$. Pour chaque valeur $x \in \mathcal{X}$, on pose

$$p(x) = \mathrm{P}\left(X = x\right)$$

On appelle entropie de la variable X le réel

$$H(X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log\left(p(x)\right)$$

où l'on convient $0 \log 0 = 0$.

a) Vérifier que $H(X)$ est un réel positif. À quelle condition celui-ci est-il nul ?
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans des ensembles finis $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

b) On appelle entropie conjointe de X et Y, l'entropie de la variable $Z = (X, Y)$ simplement notée $H(X, Y)$.
On suppose les variables X et Y indépendantes, vérifier

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y)$$

c) On appelle entropie de X sachant Y la quantité

$$H(X \mid Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

Vérifier

$$H(X \mid Y) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(Y = y)H(X \mid Y = y)$$

avec

$$H(X \mid Y = y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}\left(X = x \mid Y = y\right)\log\left(\mathrm{P}\left(X = x \mid Y = y\right)\right)$$

Indépendance

Exercice 47 [04083] [Correction]
Soient X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et f une application définie sur $X(\Omega)$.
À quelle condition les variables aléatoires X et $Y = f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 48 [04112] [Correction]
Un péage autoroutier comporte deux barrières. Le nombre de voitures arrivant à ce péage par jour suit une loi de Poisson de paramètre λ et chaque voiture choisit arbitrairement et indépendamment des autres de franchir l'une ou l'autre des deux barrières. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant le nombre de voitures franchissant chacune des deux barrières dans une journée.

a) Déterminer la loi de X_1.

b) En exploitant $X_1 + X_2$, calculer la covariance de X_1 et X_2.

c) Montrer que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont en fait indépendantes.

Moments

Exercice 49 [04084] [Correction]
Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On note I_X l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels existe

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

a) Montrer que I_X est un intervalle contenant 0.

b) On suppose que 0 est intérieur à l'intervalle I_X. Montrer que la variable X admet des moments à tout ordre et que sur un intervalle centré en 0

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{E}(X^n)}{n!} t^n$$

Exercice 50 [04023] [Correction]
Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle fonction génératrice des moments de X l'application

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $M_X(t)$.

b) On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle $]-a\,;a[$.
Montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'on a

$$\mathrm{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0)$$

Inégalités de concentration

Exercice 51 [04113] [Correction]
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Exercice 52 [04122] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $x \in [0\,;1]$ et $X_n = S_n/n$
Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n. Justifier

$$\forall \alpha > 0, \mathrm{P}\left(|X_n - x| > \alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

b) On introduit la variable aléatoire $Y_n = f\left(X_n\right)$ et on pose $B_n(f)(x) = \mathrm{E}\left(Y_n\right)$.
Vérifier que $B_n(f)(x)$ est une fonction polynôme de la variable x.
Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine). Ceci assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in [0\,;1]^2, |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Au surplus, la fonction f étant continue sur un segment, elle y est bornée (théorème de la borne atteinte). Ceci permet d'introduire un réel M vérifiant

$$\forall x \in [0\,;1], |f(x)| \leq M$$

c) Avec les notations ci-dessus, établir

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$$

et

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq \varepsilon$$

d) Conclure qu'à partir d'un certain rang, on a

$$\forall x \in [0\,;1], |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

Ce résultat constitue une démonstration « probabiliste » du théorème de Stone-Weierstrass assurant que toute fonction réelle continue sur un segment peut être uniformément approchée par une fonction polynôme.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Les $X_n(\Omega)$ sont des ensembles au plus dénombrables et

$$Y(\Omega) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\Omega)$$

On en déduit que l'ensemble $Y(\Omega)$ est au plus dénombrable.
De plus, pour tout $y \in Y(\Omega)$

$$Y^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n \text{ et } X_n(\omega) = y\}$$

et donc

$$Y^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{N(\omega) = n\} \cap \{X_n(\omega) = y\}$$

est bien élément de la tribu $\mathcal{T}$.

Exercice 2 : [énoncé]

a) θ_n est une probabilité donc $\theta_n \in [0\,;1]$.
Si $\theta_n = 1$ alors $\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(T \geq n)$ et donc $\mathrm{P}(T > n) = 0$ ce qu'exclut les hypothèses.

b) On a $\mathrm{P}(T = n) = \theta_n \mathrm{P}(T \geq n)$ et $\mathrm{P}(T = n) + \mathrm{P}(T \geq n+1) = \mathrm{P}(T \geq n)$ donc

$$\mathrm{P}(T \geq n+1) = (1-\theta_n)\,\mathrm{P}(T \geq n)$$

Sachant $\mathrm{P}(T \geq 0) = 1$, on obtient

$$\mathrm{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k)$$

Puisque $\mathrm{P}(T \geq n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\theta_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Ainsi, il y a divergence de la série $\sum \ln(1-\theta_n)$.
Si la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, la série $\sum \theta_n$ est évidemment divergente.
Si la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors $\ln(1-\theta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\theta_n$ et, par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum \theta_n$ diverge.

c) Analyse : Si T est une variable aléatoire solution alors

$$\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(T \geq n) - \mathrm{P}(T \geq n+1) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$$

ce qui détermine entièrement la loi de T.
Synthèse : Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$$

Vérifions aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de somme égale à 1.
Introduisons $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$. On a

$$\ln P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\theta_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

En effet, la série des $\ln(1-\theta_k)$ est divergente à terme négatifs et ce que la suite (θ_n) tend vers 0 ou non).
On a aussi $P_0 = 1$ et $P_n - P_{n+1} = u_n$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = P_0 - P_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On peut alors définir une variable aléatoire T dont la loi vérifie

$$\mathrm{P}(T = n) = u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$$

On a alors

$$\mathrm{P}(T \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k) > 0$$

et

$$\mathrm{P}(T = n \mid T \geq n) = \theta_n$$

La variable aléatoire T est bien solution.

Exercice 3 : [énoncé]
L'événement $(X \geq n)$ est la réunion disjointe des événements $(X = n)$ et $(X \geq n+1)$. On en déduit

$$\mathrm{P}(X = n) = kP(X = n) + kP(X \geq n+1)$$

et donc

$$\mathrm{P}(X = n+1) = (1-k)\,\mathrm{P}(X = n)$$

La suite $(\mathrm{P}(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $1-k$ et, sachant que sa somme vaut 1, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X = n) = k(1-k)^n$$

Exercice 4 : [énoncé]

a) Posons $M = \max(-a, b)$. On a $|X| \leq M$ et la constante M admet une espérance. On en déduit que X admet une espérance. De plus

$$m = \mathrm{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) \geq \sum_{x\in X(\Omega)} aP(X = x) = a$$

et de même $m \leq b$.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{y\geq 0} yP(Y = y)\right)^2 \leq \sum_{y\geq 0} y^2\,\mathrm{P}(Y = y) \sum_{y\geq 0} \mathrm{P}(Y = y) = su$$

c) De façon immédiate $\mathrm{E}(Y) = 0$ et $\mathrm{V}(Y) = \sigma^2$. On en déduit

$$t = -\sum_{y<0} yP(Y = y) \text{ et } \sum_{y<0} y^2\,\mathrm{P}(Y = y) = \sigma^2 - s$$

En appliquant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$t^2 \leq (\sigma^2 - s)(1-u)$$

d) Ce qui précède fournit

$$t^2 \leq \min\left\{su, (\sigma^2 - s)(1-u)\right\}$$

pour $u \in [0\,;1]$ et $s \in [0\,;\sigma^2]$. Sachant

$$su \leq (\sigma^2 - s)(1-u) \iff s + \sigma^2 u \leq \sigma^2$$

Si $s + \sigma^2 u \leq \sigma^2$ alors

$$\min\left\{su, (\sigma^2 - s)(1-u)\right\} = su \leq \sigma^2(1-u)u \leq \sigma^2/4$$

Si $s + \sigma^2 u > \sigma^2$, c'est analogue et la conclusion demeure.

e) On a

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(Y^2) = \sum_{y\geq 0} y^2\,\mathrm{P}(Y = y) + \sum_{y<0} y^2\,\mathrm{P}(Y = y)$$

Puisque Y est à valeurs dans $[a-m\,; b-m]$, on a

$$\sum_{y\geq 0} y^2\,\mathrm{P}(Y = y) \leq \sum_{y\geq 0} (b-m)yP(Y = y) = (b-m)t$$

et

$$\sum_{y<0} y^2\,\mathrm{P}(Y = y) \leq \sum_{y<0} (a-m)yP(Y = y) = -(a-m)t$$

On en déduit

$$\sigma^2 \leq (b-a)t$$

En élevant au carré

$$\sigma^4 \leq (b-a)^2 t^2 = \frac{(b-a)^2}{4}\sigma^2$$

Enfin, que σ soit nul ou non, on obtient

$$\sigma^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

Notons que cette inégalité est une égalité lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$.

Exercice 5 : [énoncé]
Pour $k \in [\![0\,; n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|x^k\right| \leq 1 + |x|^n$$

car l'inégalité est vraie que $|x| \leq 1$ ou non. On en déduit

$$\left|X^k\right| \leq 1 + |X|^n$$

Or 1 et $|X|^n$ admettent une espérance donc X^k aussi.

Exercice 6 : [énoncé]
On a

$$\mathrm{P}\left(X>n\right)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X>n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k)$$

Puisque les termes sommés sont positifs

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X>n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1}\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}kP(X=k)$$

et la convergence d'un membre équivaut à celle de l'autre.

Exercice 7 : [énoncé]

a) Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Cas $n=1$. Si X suit une loi binomiale négative de paramètres 1 et p alors

$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{k-1}{0}p(1-p)^{k-1}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre p.
Supposons la propriété vraie au rang $n\geq 1$.
L'évènement $X_1+\cdots+X_{n+1}=k$ peut se décomposer en la réunion des évènements incompatibles suivants

$$X_1+\cdots+X_n=\ell \text{ et } X_{n+1}=k-\ell \text{ pour } \ell\in[\![n\,;k-1]\!]$$

On en déduit par indépendance

$$\mathrm{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=\sum_{\ell=n}^{k-1}\binom{\ell-1}{n-1}p^n(1-p)^{\ell-n}p(1-p)^{k-\ell-1}$$

puis

$$\mathrm{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=p^n(1-p)^{k-(n+1)}\sum_{\ell=n}^{k-1}\binom{\ell-1}{n-1}$$

Or par la formule du triangle de Pascal

$$\sum_{\ell=n}^{k-1}\binom{\ell-1}{n-1}=\binom{k-1}{n}$$

et donc

$$\mathrm{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=\binom{k-1}{n}p^n(1-p)^{k-(n+1)}$$

Récurrence établie.

b) Par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(X)=\frac{n}{p}$$

Par indépendance des variables sommées

$$\mathrm{V}(X)=n\frac{1-p}{p^2}$$

Exercice 8 : [énoncé]

a) Notons A_n l'évènement « le jeu dure au moins n parties ». A_{n+1} est la conjonction des évènements indépendants A_n et le rouge sort au $n+1$- ième tirage ». On en déduit

$$\mathrm{P}(A_{n+1})=\frac{1}{2}\,\mathrm{P}(A_n)$$

Par continuité décroissante, on obtient

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(A_n)=0$$

L'arrêt du jeu est donc presque sûr.
Lorsque la partie s'arrête à la n-ième tentative, le joueur a perdu $1+2+\cdots+2^{n-1}$ brouzoufs et vient de gagner 2^n brouzoufs. Au total, il gagne 1 brouzouf. Son gain étant presque sûrement constant égal à 1 brouzoufs, son espérance de gain vaut 1 brouzouf.

b) Avec ce nouveau protocole, lorsque la partie s'arrête à la n-ième tentative, le gain du joueur vaut

$$2.3^{n-1}-(1+3+\cdots+3^{n-1})=\frac{3^{n-1}+1}{2}$$

L'espérance de gain est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}+1}{2} \mathrm{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}+1}{2^{n+1}} = +\infty$$

c) Puisque le joueur ne peut disputer que n parties, son espérance de gain devient

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \times \mathrm{P}(A_n) - (2^n-1)\,\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \frac{1}{2^n} - (2^n-1) \times \frac{1}{2^n} = 0$$

Exercice 9 : [énoncé]

En dérivant successivement

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

La propriété

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k) = 1$$

fournit

$$a = (1-p)^{n+1}$$

De plus, une nouvelle dérivation donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k \binom{n+k}{k} x^{k-1} = \frac{(n+1)}{(1-x)^{n+2}}$$

donc

$$\mathrm{E}(X) = a \sum_{k=0}^{+\infty} k \binom{n+k}{k} p^k = a \frac{(n+1)p}{(1-p)^{n+2}} = \frac{(n+1)p}{1-p}$$

De même

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \frac{(n+2)(n+1)p^2}{(1-p)^2}$$

puis

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{(n+1)p}{(1-p)^2}$$

Exercice 10 : [énoncé]

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \alpha\sigma\right) < \frac{\sigma^2}{(\alpha\sigma^2)} = \frac{1}{\alpha^2}$$

On conclut par considération d'évènement complémentaire.

Exercice 11 : [énoncé]

a) Il est entendu que la variable S_n prend ses valeurs dans $[\![0\,;N]\!]$.
Par récurrence sur $n \geq 1$, montrons que S_n suit une binomiale de paramètres N et p_n (avec p_n à déterminer).
Pour $n=1$, $S_1 = X_1$ suit, compte tenu de la modélisation, une loi binomiale de paramètres N et $1/6$.
Supposons que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n.
Lors du$(n+1)$-ième lancer, le joueur dispose de $N-M$ dés avec $M = S_n$
X_{n+1} suit alors une loi binomiale de paramètres $N-M$ et $1/6$ (avec $N-M$ qui peut être nul auquel cas X_{n+1} est une variable constante égale à 0). On a donc

$$\forall k \in [\![0\,;N-M]\!], \mathrm{P}\left(X_{n+1}=k \mid S_n = M\right) = \binom{N-M}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{N-M-k}$$

On a alors, pour $m \in [\![0\,;N]\!]$

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k) = \sum_{M=0}^{k} \mathrm{P}(S_n = M)\,\mathrm{P}\left(X_{n+1} = k-M \mid S_n = M\right)$$

Ceci donne

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k) = \sum_{M=0}^{k} \binom{N}{M} p_n^M (1-p_n)^{N-M} \binom{N-M}{k-M} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-M} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

Or

$$\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M} = \frac{N!}{M!(k-M)!(N-k)!} = \binom{N}{k}\binom{k}{M}$$

et donc

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k) = \binom{N}{k}(1-p_n)^N \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \sum_{M=0}^{k} \binom{k}{M} \left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^M \left(\frac{1}{6}\right)^{k-M}$$

puis

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\binom{N}{k}(1-p_n)^N\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}\left(\frac{p_n}{1-p_n}+\frac{1}{6}\right)^k$$

On peut réorganiser

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^k\left(1-\frac{1+5p_n}{6}\right)^{N-k}$$

Ainsi, S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et $p_{n+1}=\frac{1+5p_n}{6}$.
Récurrence établie.
On peut préciser la probabilité p_n sachant

$$p_1=\frac{1}{6}\text{ et }p_{n+1}=\frac{1+5p_n}{6}$$

La résolution de cette relation de récurrence donne

$$p_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

b) Connaissant la loi de S_n, on peut déterminer directement la probabilité de l'événement $(S_n=N)$

$$\mathrm{P}(S_n=N)=\binom{N}{N}p_n^N(1-p_n)^0=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

L'événement

$$A=\text{ « il existe } n \text{ tel que } S_n=N\text{ »}$$

est la réunion croissante des événements $(S_n=N)$. Par continuité croissante

$$\mathrm{P}(A)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(S_n=N)=1$$

c) Pour déterminer la loi de T, on va calculer la probabilité de l'événement $(T\leq n)$. Ce dernier correspond à l'événement $(S_n=N)$ et donc

$$\mathrm{P}(T\leq n)=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N\text{ avec }n\in\mathbb{N}$$

On a alors

$$\mathrm{P}(T=n)=\mathrm{P}(T\leq n)-\mathrm{P}(T\leq n-1)$$

et donc

$$\mathrm{P}(T=n)=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N-\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N$$

En fait, la loi de T peut être comprise comme le max de N lois géométriques indépendantes.

d) Pour calculer l'espérance de T, on exploite la formule

$$\mathrm{E}(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(T>n)\text{ avec }\mathrm{P}(T>n)=1-\mathrm{P}(T\leq n)$$

En exploitant la factorisation

$$1-a^N=(1-a)(1+a+\cdots+a^{N-1})$$

on obtient

$$\mathrm{P}(T>n)=1-\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N=\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}(-1)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{nk}$$

Par sommation géométrique

$$\mathrm{E}(T)=\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}\frac{(-1)^{k-1}6^k}{6^k-5^k}$$

Numériquement
Pour $N=1$, $\mathrm{E}(T)=6$ (on reconnaît l'espérance d'une loi géométrique)
Pour $N=2$, $\mathrm{E}(T)=96/11\simeq 8{,}7$.
On peut même poursuivre un tableau de valeurs
$N=3$, $\mathrm{E}(T)=10{,}5$
$N=4$, $\mathrm{E}(T)=11{,}9$
$N=5$, $\mathrm{E}(T)=13{,}0$
et les valeurs de l'espérance qui suivent sont $13{,}9, 14{,}7, 15{,}4, \dots$

Exercice 12 : [énoncé]
Pour $i\geq 2$, on introduit l'événement

$$A_i=\text{« La } i\text{-ème boule tirée est identique à la précédente »}$$

Compte tenu de la composition de l'urne, on peut affirmer

$$\mathrm{P}(A_i)=1/N$$

Compte tenu de l'expérience modélisée (tirage avec remise), les événements A_i sont mutuellement indépendants.

a) L'événement $(T=k)$ correspond à $A_2\cap\ldots\cap A_k$ et donc

$$\mathrm{P}(T=k)=\frac{1}{N^{k-1}}$$

L'événement $(T = k+1)$ correspond à $\overline{A_2} \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k+1}$ et donc

$$\mathrm{P}(T = k+1) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{N^{k-1}} = \frac{N-1}{N^k}$$

b) L'événement $(T = n+k)$ correspond à $\overline{(T \leq n)} \cap \overline{A_{n+1}} \cap A_{n+2} \cap \ldots \cap A_{n+k}$ et donc

$$\mathrm{P}(T = n+k) = \mathrm{P}(T > n) \times \frac{N-1}{N^k}$$

c) Sous réserve de convergence, l'espérance de T peut s'écrire

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n)$$

Ici

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n) = \mathrm{P}(T > 0) + \frac{N^k}{N-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n+k)$$

Ce qui assure l'existence de l'espérance. De plus, puisque le processus s'arrête presque sûrement et que la variable$T$ prend ses valeurs dans $\{k, k+1, \ldots\}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n+k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n) - \mathrm{P}(T = k) = 1 - \frac{1}{N^{k-1}}$$

On en déduit la valeur de l'espérance de T

$$\mathrm{E}(T) = \frac{N^k - 1}{N-1}$$

Notons, même si ce n'est pas l'objet de cet exercice, qu'il est assez facile de justifier que le processus s'arrête presque sûrement. Considérons l'événement

$$B = « \text{ le processus ne s'arrête pas } »$$

Pour voir que celui-ci est négligeable, on va l'inclure dans un événement (de probabilité plus immédiatement accessible) en regroupant les tirages k par k :

$$B \subset \bigcap_{j=0}^{+\infty} \{\text{les tirages de rangs } jk+1, jk+2, \ldots, jk+k \text{ ne sont pas tous identiques}\}$$

Par indépendance et continuité décroissante

$$\mathrm{P}(B) \leq \lim_{J \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{N^{k-1}}\right)^J = 0$$

Exercice 13 : [énoncé]

a) Introduisons les événements

$$A_p = \{X_{2p-1} + X_{2p} \leq 1\} \text{ avec } p \geq 1$$

Ces événements sont indépendants et

$$\mathrm{P}(A_p) = (1-p)^2 + 2p(1-p) = 1 - p^2$$

Par continuité décroissante

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} A_p\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{N} A_p\right)$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{N} A_p\right) = \prod_{p=1}^{N} \mathrm{P}(A_p) = (1-p^2)^N$$

Par limite d'une suite géométrique de raison $1 - p^2 \in]0\,;1[$, on obtient

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} A_p\right) = 0$$

Par conséquent, l'événement $\overline{\bigcup_{p=1}^{+\infty} A_p}$ est presque sûr. Ainsi, il existe presque sûrement un rang pair en lequel il y a deux succès consécutifs. *A fortiori*, il est presque sûr qu'il existe un rang (pair ou impair) en lequel il y a deux succès consécutifs.

b) Pour $n \geq 2$, on souhaite calculer $p_n = \mathrm{P}(T = n)$.
Pour $n = 2$, l'événement $(T = 2)$ correspond à $(X_1 = 1, X_2 = 1)$ de probabilité p^2.
Pour $n = 3$, l'événement $(T = 3)$ correspond à $(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$ de probabilité $(1-p)p^2$.
Pour $n \geq 3$, les choses se compliquent quelque peu. Considérons le système complet d'événements

$$(X_1 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 1)$$

Par la formule des probabilités totales
$\mathrm{P}(T = n) = P_{X_1=0}(T = n)\,\mathrm{P}(X_1 = 0) + P_{X_1=1,X_2=0}(T = n)\,\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + P_{X_1=1,X_2=1}(T = n)\,\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$

Or

$$P_{X_1=0}(T=n) = \mathrm{P}(T=n-1)$$

En effet, la première épreuve étant un échec, obtenir deux succès consécutifs au rang n revient maintenant à obtenir deux succès consécutifs au rang $n-1$.
Par un argument analogue

$$P_{X_1=1,X_2=0}(T=n) = \mathrm{P}(T=n-2)$$

Enfin

$$P_{X_1=1,X_2=1}(T=n) = 0$$

car les deux succès consécutifs ont été obtenus au rang 2 et qu'ici $n \geq 3$.
Finalement, on obtient la relation de récurrence

$$\mathrm{P}(T=n) = (1-p)\,\mathrm{P}(T=n-1) + p(1-p)\,\mathrm{P}(T=n-2)$$

c) Par calculer l'espérance de T, on multiplie par n la relation précédente et on somme

$$\sum_{n=3}^{+\infty} nP(T=n) = (1-p)\sum_{n=3}^{+\infty} nP(T=n-1) + p(1-p)\sum_{n=3}^{+\infty} nP(T=n-2)$$

Or

$$\sum_{n=3}^{+\infty} nP(T=n-1) = \sum_{n=3}^{+\infty}(n-1+1)\,\mathrm{P}(T=n-1) = \sum_{n=2}^{+\infty} nP(T=n) + 1$$

car $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{P}(T=n) = 1$
De même

$$\sum_{n=3}^{+\infty} nP(T=n-2) = \sum_{n=2}^{+\infty} nP(T=n) + 2$$

Ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} nP(T=n) - 2P(T=2) = (1-p^2)\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{P}(T=n) + 1 + p - 2p^2$$

Finalement, T admet une espérance finie et

$$E(T) = \frac{1+p}{p^2}.$$

Exercice 14 : [énoncé]

a) Le jeu dure infiniment si, et seulement si, chaque lancer produit « face » ou bien chaque lancer produit « pile ». Notons A_n l'évènement :

« le n - ième lancer donne face »

Par indépendance des lancers

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) = \frac{1}{2^n}$$

Par continuité décroissante

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) = 0$$

De même

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 0$$

L'évènement « le jeu ne s'arrête pas » est donc négligeable.

b) X est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X > n$ si les n premiers lancers sont identiques. On en déduit

$$\mathrm{P}\left(X > n\right) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \cup \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 3$$

En fait $X-1$ suit une loi géométrique de paramètre $1/2$.

Exercice 15 : [énoncé]
On a

$$\mathrm{E}\left((Y-(aX+b))^2\right) = \mathrm{V}\left(Y-(aX+b)\right) + \mathrm{E}\left(Y-(aX+b)\right)^2$$

D'une part

$$\mathrm{V}\left(Y-(aX+b)\right) = \mathrm{V}(Y-aX) = a^2\,\mathrm{V}(X) - 2a\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{V}(Y)$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\left(Y-(aX+b)\right) &= \mathrm{V}(Y-aX)\\ &= \left(a-\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}\right)^2\mathrm{V}(X)+\frac{\mathrm{V}(X)\,\mathrm{V}(Y)-\left(\mathrm{Cov}(X,Y)\right)^2}{\mathrm{V}(X)}\end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathrm{E}\left(Y-(aX+b)\right)^2 = 0 \text{ pour } b=\mathrm{E}(Y)-aE(X)$$

On en déduit que

$$\mathrm{E}\left((Y-(aX+b))^2\right)$$

est minimale pour

$$a=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} \text{ et } b=\frac{\mathrm{V}(X)\,\mathrm{E}(Y)-\mathrm{Cov}(X,Y)\,\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)}$$

Ces valeurs de a et b réalisent une régression linéaire : elles donnent la meilleure expression linéaire de Y en fonction de X.

Exercice 16 : [énoncé]
Par la formule de Huygens

$$\mathrm{E}\left((Y-S)^2\right)=\mathrm{V}\left(Y-S\right)+\left[\mathrm{E}\left(Y-S\right)\right]^2$$

avec

$$\mathrm{E}\left(Y-S\right)=(a-1)m_S+b$$

et

$$\mathrm{V}\left(Y-S\right)=\mathrm{V}\left((a-1)S+aB+b\right)=(a-1)^2\sigma_s^2+a^2\sigma_B^2$$

car la covariance de S et B est nulle.
La quantité $\mathrm{V}(Y-S)$ est minimale pour

$$a=\frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2+\sigma_B^2}$$

et l'on peut alors rendre le terme $\left[\mathrm{E}\left(Y-S\right)\right]^2$ nul pour

$$b=(1-a)m_S$$

Au final

$$Y=\frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2+\sigma_B^2}X+\frac{\sigma_B^2}{\sigma_S^2+\sigma_B^2}m_S$$

Exercice 17 : [énoncé]

a) On a

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{Cov}(X,X)$$

Par bilinéarité

$$\mathrm{V}(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\,\mathrm{V}(X_i,X_j)$$

Ce calcul est aussi le résultat du produit matriciel

$${}^tC\Sigma C \text{ avec } C={}^t\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

b) Soit $C={}^t\begin{pmatrix}ccca_1 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre de Σ associé à une valeur propre λ.
On a ${}^tC\Sigma C=\lambda{}^tCC=\lambda\left\|C\right\|^2$ et, pour $X=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$, $\mathrm{V}(X)\geq 0$ donc

$$\lambda=\frac{\mathrm{V}(X)}{\left\|C\right\|^2}\geq 0$$

Exercice 18 : [énoncé]
$X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\mathrm{P}(X+Y=k)=\sum_{\ell=0}^k\mathrm{P}(X=\ell,Y=k-\ell)$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}(X+Y=k)=\sum_{\ell=0}^k\mathrm{P}(X=\ell)\,\mathrm{P}(Y=k-\ell)$$

puis

$$\mathrm{P}(X+Y=k)=\sum_{\ell=0}^k\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}\,\mathrm{e}^{-\mu}\,\frac{\mu^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

On réorganise

$$\mathrm{P}(X+Y=k)=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{\ell=0}^k\binom{k}{\ell}\lambda^\ell\mu^{k-\ell}$$

Par la formule du binôme

$$\mathrm{P}(X+Y=k)=\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

La variable $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Exercice 19 : [énoncé]
Les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $X+Y$ est à valeurs $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Pour $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a

$$\mathrm{P}(X+Y=k)=\sum_{\ell=1}^{k-1}\mathrm{P}(X=\ell,Y=k-\ell)$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}(X+Y=k)=\sum_{\ell=1}^{k-1}\mathrm{P}(X=\ell)\,\mathrm{P}(Y=k-\ell)$$

Il ne reste plus qu'à dérouler les calculs :

$$\mathrm{P}(X+Y=k)=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$

Exercice 20 : [énoncé]

a) Par sommation géométrique ou considération d'une succession de n échecs

$$\mathrm{P}(X>n)=(1-p)^n$$

b) On a

$$(Z>n)=(X>n)\cap(Y>n)$$

et par indépendance

$$\mathrm{P}(Z>n)=(1-p)^n(1-q)^n$$

On en déduit

$$\mathrm{P}(Z=n)=\mathrm{P}(Z>n-1)-\mathrm{P}(Z>n)=(p+q-pq)\left((1-p)(1-q)\right)^{n-1}$$

c) On peut encore écrire

$$\mathrm{P}(Z=n)=r(1-r)^{n-1}\text{ avec }r=p+q-pq$$

Z suit donc une loi géométrique de paramètre $p+q-pq$.

Exercice 21 : [énoncé]
Il s'agit de calculer

$$\mathrm{P}\left(X=k\mid X+Y=n\right)$$

pour une valeur de k qui est nécessairement élément de $[\![0\,;n]\!]$.

$$\mathrm{P}\left(X=k\mid X+Y=n\right)=\frac{\mathrm{P}(X=k,X+Y=n)}{\mathrm{P}(X+Y=n)}$$

donc

$$\mathrm{P}\left(X=k\mid X+Y=n\right)=\frac{\mathrm{P}(X=k,Y=n-k)}{\mathrm{P}(X+Y=n)}$$

Puisque $X+Y$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda+\mu$, on obtient

$$\mathrm{P}\left(X=k\mid X+Y=n\right)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}$$

En écrivant

$$\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

on reconnaît une loi binomiale de paramètres n et $\lambda/(\lambda+\mu)$.

Exercice 22 : [énoncé]

a) Posons

$$u_n=\mathrm{P}(X=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\lambda}{n+1}$$

donc si $n+1\leq\lambda$ alors $u_{n+1}\geq u_n$ et si $n+1>\lambda$ alors $u_{n+1}<u_n$.
La valeur maximale de u_n est donc obtenue pour $n=\lfloor\lambda\rfloor$.

b) Il suffit d'étudier les variations de la fonction $\lambda\mapsto\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n$. La probabilité sera maximale si $\lambda=n$.

Exercice 23 : [énoncé]
Par la formule de transfert

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(1-p)^{k-1}p=\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k}$$

Or pour $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k = -\ln(1-x)$$

donc

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{p-1} \ln p$$

Exercice 24 : [énoncé]
Par la formule de Transfert

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right)$$

donc

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$$

Exercice 25 : [énoncé]
On a

$$(Z > n) = (X > n) \cup (Y > n)$$

donc

$$\mathrm{P}(Z > n) = \mathrm{P}(X > n) + \mathrm{P}(Y > n) - \mathrm{P}(X > n, Y > n)$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}(Z > n) = \mathrm{P}(X > n) + \mathrm{P}(Y > n) - \mathrm{P}(X > n)\,\mathrm{P}(Y > n)$$

Puisque les lois de X et Y sont géométriques

$$\mathrm{P}(Z > n) = (1-p)^n + (1-q)^n - (1-p)^n(1-q)^n$$

Or

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z > n)$$

donc

$$\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p+q-pq}$$

Exercice 26 : [énoncé]
L'évènement X est pair est la réunion dénombrable des évènements $(X = 2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Sa probabilité vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = 2k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}$$

Exercice 27 : [énoncé]

a) On a $X_{k+1} - X_k = n$ si, et seulement si, on tire $n-1$ images déjà obtenues puis une image nouvelle. La proportion en cours du nombre d'images déjà obtenues est k/N et donc

$$\mathrm{P}(X_{k+1} - X_k = n) = \left(\frac{k}{N}\right)^{n-1}\left(\frac{N-k}{N}\right) = \frac{k^{n-1}(N-k)}{N^n}$$

On identifie une loi géométrique de paramètre $p = (N-k)/N$ et d'espérance $N/(N-k)$.

b) Par télescopage

$$\mathrm{E}(X_N) = \sum_{k=1}^{N-1} \mathrm{E}(X_{k+1} - X_k) + \mathrm{E}(X_1) = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

Exercice 28 : [énoncé]
L'événement $(X < Y)$ peut être décomposé en la réunion disjointes des événements

$$(X = k, Y > k) \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*$$

On a donc

$$\mathrm{P}(X < Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k, Y > k)$$

Par indépendance des variables X et Y, on a

$$\mathrm{P}(X = k, Y > k) = \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}(Y > k)$$

avec

$$\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \text{ et } \mathrm{P}(Y > k) = (1-q)^k$$

On en déduit

$$\mathrm{P}(X < Y) = \sum_{k=1}^{n} p(1-q)\left((1-p)(1-q)\right)^{k-1} = \frac{p-pq}{p+q-pq}$$

Exercice 29 : [énoncé]

a) Distinguons les cinq dés et notons pour chacun $X_1, \ldots, X_5$ les variables aléatoires donnant le nombre de lancers nécessaires avant que le dé correspondant ne produise un « As ». Ces variables aléatoires suivent des lois géométriques indépendantes de paramètre $p = 1/6$ et $T = \max(X_1, \ldots, X_5)$.
On a
$$(T \leq n) = (X_1 \leq n) \cap \ldots \cap (X_n \leq n)$$
Par indépendance
$$\mathrm{P}(T \leq n) = \mathrm{P}(X_1 \leq n) \ldots \mathrm{P}(X_5 \leq n)$$
avec
$$\mathrm{P}(X_i \leq n) = 1 - \mathrm{P}(X_i > n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$
Ainsi
$$\mathrm{P}(T \leq n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^5$$

b) Sous réserve de convergence
$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n)$$
Ici
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^5$$
En développant la puissance
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n) = 5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n - 10\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} + 10\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3n} - 5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{4n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{5n}$$
avec convergence des séries écrites.
Finalement
$$\mathrm{E}(T) = \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1}\binom{5}{k}\frac{1}{1-(5/6)^k}$$

Exercice 30 : [énoncé]
Une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
est diagonalisable si $a \neq b$ (2 valeurs propres distinctes pour une matrice de taille 2) et ne l'est pas si $a = b$ (1 seule valeur propre et n'est pas une matrice scalaire).
La probabilité recherchée n'est donc autre que
$$\mathrm{P}(X \neq Y)$$
L'événement $(X \neq Y)$ est le complémentaire de l'événement $(X = Y)$ qui est la réunion d'événements deux à deux disjoints
$$(X = Y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (X = n, Y = n)$$
Par indépendance
$$\mathrm{P}(X = n, Y = n) = \mathrm{P}(X = n)\,\mathrm{P}(Y = n) = pq\left((1-p)(1-q)\right)^{n-1}$$
Ainsi
$$\mathrm{P}\left(X = Y\right) = \frac{pq}{p+q-pq}$$
Finalement, la probabilité que la matrice soit diagonalisable vaut
$$1 - \mathrm{P}(X = Y) = \frac{p+q-2pq}{p+q-pq}$$

Exercice 31 : [énoncé]

a) Pour $s \leq t$, l'événement $A(0,0,s)$ contient l'événement $A(0,0,t)$ et donc $p_0(s) \geq p_0(t)$.
Pour $s, t \geq 0$, l'événement$A(0,0,s+t)$ est la conjonction des événements $A(0,0,s)$ et $A(0,s,s+t)$. Par conséquent
$$\mathrm{P}(A(0,0,s+t) = \mathrm{P}\left(A(0,0,s) \cap A(0,s,s+t)\right)$$
Par indépendance (hypothèse H1)
$$\mathrm{P}\left(A(0,0,s+t)\right) = \mathrm{P}\left(A(0,0,s)\right)\mathrm{P}\left(A(0,s,s+t)\right)$$
Or, l'hypothèse H2 donne $\mathrm{P}\left(A(0,s,s+t)\right) = \mathrm{P}(A(0,0,t))$ et donc
$$p_0(s+t) = p_0(s)p_0(t)$$

b) Par l'hypothèse H3, la fonction p_0 prend la valeur 1 en 0 et est continue. Si par l'absurde cette fonction prend une valeur négative, elle s'annule en un certain $t_0 > 0$. L'équation fonctionnelle obtenue ci-dessus donne par une récurrence rapide

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, p_0(kt) = p_0(t)^k$$

En prenant $t = t_0/k$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p_0(t_0/k) = 0$$

En passant à limite quand k tend vers l'infini, on obtient l'absurdité $p_0(0) = 0$!
Puisqu'il est maintenant acquis que la fonction p_0 est à valeurs strictement positives, on peut introduire la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = \ln\left(p_0(t)\right)$$

L'équation fonctionnelle obtenue en a) se traduit

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, f(s+t) = f(s) + f(t)$$

Sachant la fonction f continue, on peut affirmer que celle-ci est linéaire : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = at$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, p_0(t) = \mathrm{e}^{at}$$

Enfin, puisque la fonction p_0 est décroissante, le réel a est nécessairement négatif ce qui permet de l'écrire $-\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

c) Par l'hypothèse H5 avec $p_0(t) \underset{t\to 0^+}{=} 1 - \lambda t + \mathrm{o}(t)$, on obtient

$$p_1(t) + \mathrm{o}(p_1(t)) \underset{t\to 0^+}{=} \lambda t + \mathrm{o}(t)$$

Ainsi $p_1(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \lambda t$ ce qui peut encore s'écrire

$$p_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} \lambda t + \mathrm{o}(t)$$

Aussi, l'hypothèse H4 permet d'affirmer

$$\forall n \geq 2, p_n(t) \leq 1 - p_0(t) - p_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}(t)$$

et donc $p_n(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}(t)$ pour tout $n \geq 2$.

d) L'événement $A(n, 0, s+t)$ est la réunion des événements deux à deux disjoints

$$A(k, 0, s) \cap A(n-k, s, s+t) \text{ pour } k \in [\![0\,;n]\!]$$

On en déduit par additivité et les hypothèses H1 et H2 l'identité

$$p_n(s+t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(A(k,0,s))\,\mathrm{P}(A(n-k,s,s+t)) = \sum_{k=0}^{n} p_k(s) p_{n-k}(t)$$

Cette identité fournit le développement asymptotique

$$p_n(t+s) \underset{s\to 0^+}{=} (1 - \lambda s + \mathrm{o}(s)) p_n(t) + \lambda s p_{n-1}(t) + \mathrm{o}(s)$$

car

$$p_0(s) \underset{s\to 0^+}{=} 1 - \lambda s + \mathrm{o}(s), p_1(s) \underset{s\to 0^+}{=} \lambda s + \mathrm{o}(s) \text{ et } p_k(s) \underset{s\to 0^+}{=} \mathrm{o}(s) \text{ pour } k \geq 2$$

On obtient alors

$$\frac{1}{s}\left(p_n(t+s) - p_n(t)\right) \underset{s\to 0^+}{=} \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t) + \mathrm{o}(1)$$

On en déduit que la fonction p_n est dérivable et

$$p_n'(t) = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))$$

e) En introduisant $q_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} p_n(t)$, on constate

$$q_0(t) = 1 \text{ et } q_n'(t) = \lambda q_{n-1}(t)$$

Par récurrence

$$q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, p_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

f) L'événement $(X = n)$ a la probabilité de l'événement $A(n, 0, T)$ et donc

$$\mathrm{P}(X = n) = p_n(T) = \mathrm{e}^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}$$

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λT. L'espérance de X vaut alors λT et le paramètre λ se comprend comme le nombre moyen de clients entrant par unité de temps.

Exercice 32 : [énoncé]

a) Pour $(n,k)\in\mathbb{N}^2$. Si $k\leq n$ alors

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=n,Y=k)&=\mathrm{P}(X=n)\,\mathrm{P}(Y=k\mid X=n)\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

Si $k>n$ alors $\mathrm{P}(X=n,Y=k)=0$.

b) Pour $k\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=k)$$

Après réorganisation et glissement d'indice

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^n=\mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

La variable Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 33 : [énoncé]

a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=1$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=a\,\mathrm{e}^2$$

donc $a=\mathrm{e}^{-2}$.

b) Pour $j\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{j!}$$

et donc X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=1$. Il en est de même pour Y.

c) Les variables sont indépendantes car l'on vérifie aisément

$$\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\mathrm{P}(X=j)\,\mathrm{P}(Y=k)$$

Exercice 34 : [énoncé]

a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=1$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=8a$$

car

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j+k}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j-1}}=\frac{1}{(1-1/2)^2}=4$$

On en déduit $a=1/8$

b) Pour $j\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{j+1}{2^{j+2}}$$

et pour $k\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{k+1}{2^{k+2}}$$

c) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément

$$\mathrm{P}(X=j,Y=k)\neq\mathrm{P}(X=j)\,\mathrm{P}(Y=k)$$

pour $j=k=0$.

d) Par probabilités totales

$$\mathrm{P}(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{2^{2n+3}}=\frac{1}{9}$$

Exercice 35 : [énoncé]

a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}\left(X=k,Y=n\right)=1$$

En réordonnant les sommes et en simplifiant les zéros

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\left(X=k,Y=n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}p\left(2a(1-p)\right)^n=p\frac{1}{1-(2a(1-p))}$$

On est donc amené à résoudre l'équation

$$1-2a(1-p)=p$$

ce qui conduit à la solution $a=1/2$.

b) Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\left(X=k,Y=n\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p(1-p)^n=p(1-p)^n$$

c) Pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p\left(\frac{1-p}{2}\right)^n=p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\frac{1}{(1-\frac{1-p}{2})^{k+1}}$$

En simplifiant

$$\mathrm{P}(X=k)=\left(1-\frac{1-p}{1+p}\right)\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k$$

d) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément

$$\mathrm{P}\left(X=k,Y=n\right)\neq\mathrm{P}\left(X=k\right)\mathrm{P}\left(Y=n\right)$$

pour $k=n=0$.

Exercice 36 : [énoncé]

a) T_1 suit une loi géométrique de paramètre p.

b) Notons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des variables de Bernoulli testant la réussite de chaque expérience.
L'évènement $(T_m=n)$ est la réunion correspond à l'évènement
$X_1+\cdots+X_n=m$ et $X_n=1$ soit encore
$X_1+\cdots+X_{n-1}=m-1$ et $X_n=1$. Par indépendance

$$\mathrm{P}(T_m=n)=\mathrm{P}(X_1+\cdots+X_{n-1}=m-1)\,\mathrm{P}(X_n=1)$$

Puisque $X_1+\cdots+X_{n-1}\sim\mathcal{B}(n-1,p)$ et $X_n\sim\mathcal{B}(p)$, on obtient

$$\mathrm{P}(T_m=n)=\binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}$$

et écriture vaut aussi quand $n\leq m$ car le coefficient binomial est alors nul.

c) En exploitant le développement connu de $(1+u)^\alpha$, on obtient

$$\frac{1}{(1-t)^m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1}t^n\text{ pour }t\in\left]-1\,;1\right[$$

d) Par définition

$$G_{T_m}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}t^n$$

En isolant les premiers termes nuls et en décalant l'indexation

$$G_{T_m}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1}(pt)^m\left((1-p)\,t\right)^n=\frac{(pt)^m}{(1-(1-p)t)^m}$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(X)=G'_{T_m}(1)=\frac{m}{p}$$

Exercice 37 : [énoncé]

a) Par la formule de transfert

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\ldots(X-r+1)\right)=\sum_{k=r}^{+\infty}\frac{k!}{(k-r)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda^r$$

b) La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X\right) = \lambda^r\,\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right) = \lambda^r$$

Exercice 38 : [énoncé]

a) Par la formule de transfert

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right) = \sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)(1-p)^{k-1}p$$

Or

$$\sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)x^{k-r} = \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

donc

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right) = (1-p)^{r-1}\frac{r!}{p^r}$$

b) La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \frac{pt}{1-(1-p)t} = \frac{p}{p-1} + \frac{\frac{p}{1-p}}{1-(1-p)t}$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X\right) = \frac{p}{1-p}\frac{r!(1-p)^r}{(1-(1-p)t)^{r+1}}$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right) = r!\frac{(1-p)^{r-1}}{p^r}$$

Exercice 39 : [énoncé]

a) Les évènements $(X_1+X_2 = Y_1+Y_2)$ et $(14+X_1+X_2-Y_1-Y_2 = 14)$ sont identiques.

b) Puisque X_1 est uniformément distribuée sur $[\![1\,;6]\!]$

$$G_{X_1}(t) = \frac{1}{6}\left(t+t^2+\dots+t^6\right) = \frac{t}{6}\frac{1-t^6}{1-t} = G_{X_2}(t)$$

De même, $7-Y_i$ est uniformément distribuée sur $[\![1\,;6]\!]$ et par somme de variables aléatoires indépendante

$$G_Z(t) = t^4\left[\frac{1}{6}\frac{1-t^6}{1-t}\right]^4$$

Il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient de t^{14} dans le développement en série entière de $G_Z(t)$. Pour cela, on écrit

$$G_Z(t) = \frac{t^4}{6^4}\frac{\left(1-t^6\right)^4}{(1-t)^4} = \frac{t^4}{6^4}\left(1-4t^6+6t^{12}-\cdots\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+3}{3}t^n$$

Le coefficient de t^{14} est

$$\mathrm{P}\left(X_1+X_2 = Y_1+Y_2\right) = \frac{1}{6^4}\left(\binom{13}{3} - 4\binom{7}{3}\right) = \frac{146}{6^4} \simeq 0,11$$

Un calcul direct est aussi possible en évaluant

$$\mathrm{P}(X_1+X_2 = i) = \frac{\min(i-1, 13-i)}{6^2} \text{ pour } i \in [\![1\,;12]\!]$$

auquel cas

$$\mathrm{P}(X_1+X_2 = Y_1+Y_2) = \frac{1}{6^4}\sum_{i=2}^{12}\min\left(i-1, 13-i\right)^2$$

Exercice 40 : [énoncé]

a) Par formule des probabilités totales

$$\mathrm{P}(S=n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(N=k)\,\mathrm{P}(X_1+\dots+X_k = n)$$

donc

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=k)\,\mathrm{P}(X_1+\cdots+X_k=n)t^n$$

En réordonnant la somme de cette famille sommable

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=k)\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1+\cdots+X_k=n)t^n$$

soit

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=k) G_{X_1+\cdots+X_k}(t)$$

Or, par indépendances des variables

$$G_{X_1+\cdots+X_k}(t) = [G_X(t)]^k$$

donc

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=k)\,[G_X(t)]^k = G_N\left(G_X(t)\right)$$

b) Si N et X possède une espérance alors G_N et G_X sont dérivables en 1 et G_S l'est alors avec

$$G_S'(1) = G_X'(1)G_N'(G_X(1)) = G_X'(1)G_N'(1)$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(X_1)$$

Exercice 41 : [énoncé]

a) Par définition

$$\mathrm{E}\left(t^X u^Y\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} t^k u^\ell\,\mathrm{P}(X=k, Y=\ell)$$

En regroupant par paquets selon la valeur de $X+Y$

$$\mathrm{E}\left(t^X u^Y\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k}\,\mathrm{P}(X=k, Y=n-k)$$

Or

$$(X=k, Y=n-k) = (X_1+\cdots+X_n=k)\cap(N=n)$$

donc

$$\mathrm{E}\left(t^X u^Y\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\,\mathrm{P}(N=n)$$

en notant $q=1-p$. On obtient ainsi

$$\mathrm{E}\left(t^X u^Y\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n)(pt+qu)^n = G_N(pt+qu)$$

b) Si N suit une loi de Poisson alors $G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ puis

$$G(t,u) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)}\times \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

En particulier

$$G_X(t) = G(t,1) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \text{ et } G_Y(t) = G(1,u) = \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λp tandis que Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.
De plus

$$G(t,u) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu q}\frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!}t^k u^\ell$$

En identifiant les coefficients (ce qui est possible en considérant une série entière en u dont les coefficients sont des séries entières en t), on obtient

$$\mathrm{P}(X=k, Y=\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^k}{k!} = \mathrm{P}(X=k)\,\mathrm{P}(Y=\ell)$$

Les variables X et Y apparaissent bien indépendantes.

c) Si les variables X et Y sont indépendantes alors t^X et u^Y aussi donc

$$G(t,u) = \mathrm{E}(t^X)\,\mathrm{E}(u^Y) = G(t,1)G(1,u)$$

puis

$$G_N(pt+qu) = G_N(pt+q)G_N(p+qu)$$

Posons $f(t) = G_N(t+1)$ définie et continue sur $[-2\,;0]$ avec $f(0) = G_N(1) = 1$. On a

$$f(pt+qu) = G_N(p(t+1)+q(u+1)) = G_N(pt+1)G_N(1+qu) = f(pt)f(qu)$$

ce qui fournit la propriété de morphisme

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

pour $x \in [-2p\,;0]$ et $y \in [-2q\,;0]$. Pour $y \in [-2p\,;0[$

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = f(x)\frac{f(y)-f(0)}{y}$$

On choisit $x \in [-2p\,;0[$ tel que $f(x) \neq 0$ (ce qui est possible par continuité car $f(0)=1$). Le premier membre admet une limite finie quand $y \to 0$ car f est assurément dérivable sur $]-2\,;0[$. On en déduit que le second membre admet la même limite et donc f est dérivable en 0 avec la relation

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

Posons $\lambda = f'(0)$ et sachant $f(0)=1$, on obtient

$$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \text{ sur } [-2p\,;0]$$

puis

$$G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} \text{ sur } [1-2p\,;1]$$

Si $p \geq 1/2$, ceci détermine G_N au voisinage de 0 et l'on reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ.
Sinon, $q \geq 1/2$ et il suffit de raisonner en la variable y plutôt que x.

Exercice 42 : [énoncé]

a) On a

$$G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)t^k = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

b) $G_X'(1) = \mathrm{E}(X) = \lambda$, $G_X''(1) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \lambda^2$ et
$G_X^{(3)}(1) = \mathrm{E}\left(X(X-1)(X-2)\right) = \lambda^3$.
On en déduit

$$\mathrm{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda \text{ et } \mathrm{E}(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

puis

$$\mathrm{E}\left((X-\lambda)^3\right) = \mathrm{E}(X^3) - 3\lambda\,\mathrm{E}(X^2) + 3\lambda^2\,\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^3 = \lambda$$

Exercice 43 : [énoncé]

a) S_1 suit une loi géométrique de paramètre p et

$$G_{S_1}(t) = \frac{pt}{1-qt}$$

b) $S_m - S_{m-1}$ suit la même loi géométrique de paramètre p.

c) On peut écrire

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} S_k - S_{k-1} \text{ avec } S_0 = 0$$

Or les variables aléatoires de cette somme sont indépendantes car la probabilité de l'événement

$$(S_1 - S_0 = n_1, S_2 - S_1 = n_2, \dots, S_m - S_{m-1} = n_m)$$

n'est autre que celle de l'événement

$$X_{n_1} = X_{n_1+n_2} = \ldots = X_{n_1+\cdots+n_m} = 1$$

$$\text{et } X_k = 0 \text{ pour les autres indice } k \text{ de } [\![1\,;n_1+\cdots+n_m]\!]$$

et les variables $X_1, \dots, X_{n_1+\cdots+n_m}$ sont indépendantes.
On en déduit

$$G_{S_m}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^m$$

Puisque

$$G_{S_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{m-1} q^n p^m t^{n+m}$$

on obtient

$$\mathrm{P}\left(S_m = n\right) = \binom{n-1}{m-1} q^{n-m} p^m \text{ pour } n \geq m$$

Exercice 44 : [énoncé]
Notons $X_1, \dots, X_n$ les variables aléatoires fournissant les points obtenus lors des tirages.
Les variables X_i suivent la même loi de fonction génératrice

$$G_X(t) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}t + \frac{1}{4}t^2 = \left(\frac{1+t}{2}\right)^2$$

Puisque $S = X_1 + \cdots + X_n$ avec $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes on a

$$G_S(t) = G_{X_1}(t)\dots G_{X_n}(t) = \left(G_X(t)\right)^n = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{2n}$$

En développant la somme

$$G_S(t) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k$$

Ceci détermine la loi de S :

$$\forall k \in [\![0\,;2n]\!], \mathrm{P}(S=k) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{k}$$

S suit une loi binomiale de paramètre $2n$ et $1/2$: cela s'explique aisément car l'expérience de chaque tirage peut être modélisée par deux tirages successifs d'une pièce équilibrée.

Exercice 45 : [énoncé]
On introduit la fonction génératrice de X :

$$G_X(t) = \frac{a}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty}(n+k)\dots(k+1)(pt)^k$$

Puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(n+k)\dots(k+1)x^k = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

on obtient

$$G_X(t) = \frac{a}{(1-pt)^{n+1}}$$

Sachant $G_X(1)=1$, on en tire la valeur de a

$$a = (1-p)^{n+1}$$

On peut ensuite calculer espérance et variance

$$\mathrm{E}(X) = G_X'(1) = (n+1)\frac{p}{1-p} \text{ et } \mathrm{V}(X) = G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2 = (n+1)\frac{p}{(1-p)^2}$$

Exercice 46 : [énoncé]

a) Pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a $-p(x)\log(p(x)) \geq 0$ car $p(x) \leq 1$. On en déduit $H(X) \in \mathbb{R}_+$.
Si $H(X)=0$ alors, par somme nulle de positifs, on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x)\log(p(x)) = 0$$

et donc

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x) = 0 \text{ ou } p(x) = 1$$

Sachant que

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) = \mathrm{P}(X \in \mathcal{X}) = 1$$

on peut affirmer qu'il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $p(x) = \mathrm{P}(X=x) = 1$.
La variable X est alors presque sûrement constante.

b) Par définition

$$H(X,Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\left(\mathrm{P}(X=x,Y=y)\right)$$

Or les variables X et Y étant indépendantes

$$\mathrm{P}(X=x,Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\,\mathrm{P}(Y=y)$$

puis

$$H(X,Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \mathrm{P}(X=x)\,\mathrm{P}(Y=y)\left[\log\left(\mathrm{P}(X=x)\right) + \log\left(\mathrm{P}(Y=y)\right]\right.$$

On sépare la somme en deux et l'on somme tantôt d'abord en x, tantôt d'abord en y et l'on obtient

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$$

car

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(X=x) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(Y=y) = 1$$

c) On sait

$$\mathrm{P}\left(X=x \mid Y=y\right) = \mathrm{P}(X=x,Y=y)\,\mathrm{P}(Y=y)$$

donc

$$\mathrm{P}(Y=y)H(X\mid Y=y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\mathrm{P}(X=x,Y=y)\times$$
$$\left(\log\left(\mathrm{P}(X=x,Y=y)\right) - \log\left(\mathrm{P}(Y=y)\right)\right)$$

On sépare la somme en deux et l'on somme le résultat sur $y \in \mathcal{Y}$ pour obtenir

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(Y=y)H(X \mid Y=y) = H(X,Y) + \sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\left(\mathrm{P}(Y=y)\right)$$

Or

$$\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\left(\mathrm{P}(Y=y)\right) = \sum_{y\in\mathcal{Y}}\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\left(\mathrm{P}(Y=y)\right)$$

avec

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(X=x,Y=y) = \mathrm{P}(Y=y)$$

donc

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(Y=y)H(X \mid Y=y) = H(X,Y) - H(Y)$$

Exercice 47 : [énoncé]
Supposons les variables aléatoires X et $Y = f(X)$ indépendantes.
Il existe au moins une valeur x par X vérifiant $\mathrm{P}(X=x) > 0$. En effet, la variable X étant discrète $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ est la somme des probabilités des événements valeurs $(X = x)$. Considérons ensuite la valeur $y = f(x)$.

$$\mathrm{P}\left(f(X) = y \mid X = x\right) = \frac{\mathrm{P}(f(X) = y \cap X = x)}{\mathrm{P}(X=x)}$$

Or $(X = x) \subset (f(X) = y)$, donc

$$\mathrm{P}\left(f(X) = y \mid X = x\right) = 1$$

Cependant, les variables X et $f(X)$ étant supposées indépendantes

$$\mathrm{P}\left(f(X) = y \mid X = x\right) = \mathrm{P}(f(X) = y)$$

Ainsi, l'événement $(f(X) = y)$ est presque sûr. La variable aléatoire Y est donc presque sûrement constante. La réciproque est immédiate et donc X et $Y = f(X)$ sont indépendantes si, et seulement si, Y est presque sûrement constante.

Exercice 48 : [énoncé]

a) Notons X le nombre voitures arrivant au péage

$$\mathrm{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Lorsque $X = n$, les variables aléatoires X_1 et X_2 vérifient $X_1 + X_2 = n$ et suivent chacune une loi binomiale de paramètres n et $p = 1/2$ (le nombre de voitures franchissant la première barrière peut se comprendre comme le nombre de succès dans une série de n épreuve de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 1/2$). Par probabilité totales

$$\mathrm{P}(X_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}\left(X_1 = k \mid X = n\right)\mathrm{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}2^{-n}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Après simplification et décalage de l'indexation

$$\mathrm{P}(X_1 = k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$$

Ainsi, X_1 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda/2$.

b) On a $\mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(X) = \lambda$ et
$\mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(X_1) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{V}(X_2)$ avec $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{V}(X_2) = \lambda/2$.
On en déduit $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

c) Pour $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(X_1 = k) = \mathrm{e}^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!} \text{ et } \mathrm{P}(X_2 = \ell) = \mathrm{e}^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^\ell}{\ell!}$$

et

$$\mathrm{P}(X_1 = k, X_2 = \ell) = \mathrm{P}(X_1 = k, X_1 + X_2 = k + \ell)$$

Par probabilités composées

$$\mathrm{P}(X_1 = k, X_2 = \ell) = \mathrm{P}\left(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = k + \ell\right)\mathrm{P}(X_1 + X_2 = k + \ell)$$

Ceci donne

$$\mathrm{P}(X_1 = k, X_2 = \ell) = \binom{k+\ell}{k}\frac{1}{2^{k+\ell}} \times \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}$$

On vérifie alors

$$\mathrm{P}(X_1 = k, X_2 = \ell) = \mathrm{P}(X_1 = k)\,\mathrm{P}(X_2 = \ell)$$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont effectivement indépendantes.

Exercice 49 : [énoncé]

a) Il est entendu $0 \in I_X$ et même $M_X(0) = \mathrm{E}(1) = 1$.
Soit $t > 0$ élément de I_X et $s \in [0\,;t]$. Que la valeur de X soit positive ou négative

$$\mathrm{e}^{sX} \leq 1 + \mathrm{e}^{tX}$$

et donc$M_X(s)$ est bien définie.
De même pour $t < 0$ élément de I_X, on obtient $[t\,;0] \in I_X$.
On en déduit que I_X est bien un intervalle contenant 0.

b) Soit $t > 0$ tel que $t, -t \in I_X$. Les familles $(\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ et $(\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ sont sommables et donc la famille $\left(\mathrm{e}^{t|x|}\,\mathrm{P}(X = x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ l'est aussi. Or on a la sommation à termes positifs

$$\mathrm{e}^{t|x|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n\,|x|^n}{n!}$$

Par sommation par paquets, la famille $\left(\frac{t^n x^n}{n!}\,\mathrm{P}(X = x)\right)_{(n,x)\in\mathbb{N}\times X(\Omega)}$ est sommable.
On peut alors réorganiser la sommation

$$M_X(t) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n x^n}{n!}\,\mathrm{P}(X = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{x\in X(\Omega)} \frac{t^n x^n}{n!}\,\mathrm{P}(X = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{E}(X^n)}{n!} t^n$$

c) On a alors $\mathrm{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0)$.
La fonction M_X est appelée fonction génératrice des moments.

Exercice 50 : [énoncé]

a) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a, avec convergence absolue

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{kt} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}$$

b) Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1, \dots, x_n\}$, l'affaire est entendue : la fonction génératrice des moments de X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_k}\,\mathrm{P}(X = x_k)$$

et après permutation des sommes

$$M_X(t) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{k=1}^{n} (x_k)^\ell\,\mathrm{P}(X = x_k) t^\ell = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\,\mathrm{E}(X^\ell) t^\ell$$

Si X prend une infinité de valeurs, c'est plus technique...
Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X. Pour $t \in \left]-a\,;a\right[$

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = x_n)\,\mathrm{e}^{tx_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

avec

$$u_n(t) = \mathrm{P}(X = x_n)\,\mathrm{e}^{tx_n}$$

Par hypothèse, la série de fonctions convergence simplement sur $\left]-a\,;a\right[$.
Les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$u_n^{(k)}(t) = \mathrm{P}(X = x_n) x_n^k\,\mathrm{e}^{tx_n}$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha\,;\alpha] \subset \left]-a\,;a\right[$.
Pour $t \in [-\alpha\,;\alpha]$, on peut écrire

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \leq \mathrm{P}(X = x_n)\left|x_n^k\right|\mathrm{e}^{\alpha|x_n|}$$

Introduisons $\rho \in \left]\alpha\,;a\right[$. On peut écrire

$$\mathrm{P}(X = x_n)\,|x_n|^k\,\mathrm{e}^{\alpha|x_n|} = |x_n|^k\,\mathrm{e}^{(\alpha-\rho)|x_n|} \times \mathrm{P}(X = x_n)\,\mathrm{e}^{\rho|x_n|}$$

D'une part, la fonction $t \mapsto t^k\,\mathrm{e}^{(\alpha-\rho)t}$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée ce qui permet d'introduire une constante M_k vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n|^k\,\mathrm{e}^{(\alpha-\rho)|x_n|} \leq M_k$$

D'autre part,

$$\mathrm{P}(X = x_n)\,\mathrm{e}^{\rho|x_n|} \leq \mathrm{P}(X = x_n)\,\mathrm{e}^{\rho x_n} + \mathrm{P}(X = x_n)\,\mathrm{e}^{-\rho x_n}$$

En vertu de la convergence en $\pm\rho$ de la série définissant $M_X(t)$, on peut assurer la convergence de la série positive

$$\sum \mathrm{P}(X = x_n)\,\mathrm{e}^{\rho|x_n|}$$

La majoration uniforme

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \leq M_k\,\mathrm{P}(X = x_n)\,\mathrm{e}^{\rho|x_n|}$$

donne la convergence normale de $\sum u_n^{(k)}$ sur $[-\alpha\,;\alpha]$.
Via convergence uniforme sur tout segment, on peut conclure que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a\,;a[$.
De plus, on a pour tout ordre de dérivation k et avec sommabilité la relation

$$M_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k\,\mathrm{P}(X = x_n) = \mathrm{E}(X^k)$$

Exercice 51 : [énoncé]
Posons

$$X = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i$$

Les variables étant deux à deux indépendantes

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{V}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) \leq \frac{1}{4n}$$

car $x(1-x) \leq 1/4$ pour tout $x \in [0\,;1]$.
En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on écrit

$$\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

En passant au complémentaire, on obtient

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 52 : [énoncé]

a) On sait $\mathrm{E}(S_n) = nx$ et $\mathrm{V}(S_n) = nx(1-x)$. On en déduit

$$\mathrm{E}(X_n) = x \text{ et } \mathrm{V}(X_n) = \frac{x(1-x)}{n}$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer

$$\mathrm{P}\left(|X_n - \mathrm{E}(X_n)| > \alpha\right) \leq \frac{\mathrm{V}(X_n)}{\alpha^2}$$

On en déduit

$$\mathrm{P}\left(|X_n - x| > \alpha\right) \leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

car $x(1-x) \leq 1/4$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

b) Sachant que les valeurs prises par X_n figurent parmi les k/n avec $k \in [\![0\,;n]\!]$, la formule de transfert donne

$$\mathrm{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \text{ avec } \mathrm{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \mathrm{P}\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-}$$

Ainsi

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$$

La fonction $x \mapsto B_n(f)(x)$ est bien une fonction polynôme.

c) Sachant

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leq 2M$$

on obtient

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq 2M \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \mathrm{P}(X_n = k/n) = 2MP\,(|X_n -$$

et donc

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$$

Aussi, lorsque $|k/n - x| \leq \alpha$, on a

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\mathrm{P}(X_n=k/n)\right|\leq\varepsilon\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\mathrm{P}(X_n=k/n)\leq\varepsilon$$

d) Pour n assez grand, on a $M/2n\alpha^2\leq\varepsilon$ et alors

$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leq\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\mathrm{P}(X_n=k/n)\right|+\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\mathrm{P}(X_n=k/n)\right|\leq 2\varepsilon$$