Cnc - Maths 1

Proposition de corrigé

Taoufiki said

Exercice : Calcul de la somme de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx &= \left[\frac{1}{k}\left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\sin kx\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)dx \\
&= -\frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)dx \\
&= \left[\frac{1}{k^2}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\cos kx\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\pi \cos(kx)dx \\
&= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3\pi}\left[\sin kx\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} &= e^{ix}\frac{-e^{i\frac{nx}{2}}(e^{i\frac{nx}{2}} - e^{-i\frac{nx}{2}})}{-e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} \\
&= \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=1}^{n} Re(e^{ikx})\\ &= Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)\\ &= Re\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)\\ &= Re\left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\end{aligned}$$

3. Les fonctions ψ et ψ' sont bornées sur $[0,\pi]$ car continues sur un compact, ce qui justifie l'existence de $\|\psi\|_\infty$ et $\|\psi'\|_\infty$.
Soit $m > 0$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx &= \frac{-1}{m}\left[\psi(x)\cos(mx)\right]_0^\pi + \frac{1}{m}\int_0^\pi \psi'(x)\cos(mx)dx\\ &= \frac{1}{m}\left(\psi(0)-\psi(\pi)\cos(m\pi)\right) + \frac{1}{m}\int_0^\pi \psi'(x)\cos(mx)dx\end{aligned}$$

donc $|\int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx| \leq \frac{2\|\psi\|_\infty+\pi\|\psi'\|_\infty}{m} \longrightarrow 0$, quand $m \longrightarrow +\infty$.

4. • La fonction g est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ par composition et opérations algébriques.
• $g(x) = (\frac{x}{\pi}-1)\frac{\frac{x}{2}}{2\sin(\frac{x}{2})} \longrightarrow -1 = g(0)$, quand $x \longrightarrow 0$.
•

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{2(\frac{x}{\pi}-1)\sin(\frac{x}{2}) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)\cos(\frac{x}{2})}{4\sin^2(\frac{x}{2})}\\ &= \frac{\frac{x^2}{2\pi}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

Par théorème de prolongement dérivable, la fonction g est de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $g'(0) = \frac{1}{2\pi}$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi (\frac{x^2}{2\pi} - x)\cos(kx)dx \\
&= \int_0^\pi (\frac{x^2}{2\pi} - x)(\sum_{k=1}^{n} \cos(kx))dx \\
&= \int_0^\pi (\frac{x^2}{2\pi} - x)\frac{\sin(\frac{nx}{2})\cos(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}dx \\
&= 2\int_0^\pi g(x)\sin(\frac{nx}{2})\cos(\frac{(n+1)x}{2})dx
\end{aligned}$$

en utilisant la relation trigonométrique, $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi g(x)\sin(\frac{x}{2})dx + 2\int_0^\pi g(x)\sin(\frac{(2n+1)x}{2})dx$$

comme $\int_0^\pi g(x)\sin(\frac{x}{2})dx = \int_0^\pi (\frac{x^2}{4\pi} - \frac{x}{2})dx = \frac{\pi^2}{6}$

alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin(\frac{(2n+1)x}{2})dx$.

(b) La suite de terme général $\int_0^\pi g(x)\sin(\frac{(2n+1)x}{2})dx$ admet une limite nulle donc la somme partielle de la série énoncée tend vers $\frac{\pi^2}{6}$, d'où la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et la valeur de sa somme.

6. (a) Pour un réel $x > 0$, $\frac{x}{n(1+2nx)} \sim \frac{1}{2n^2}$, quand $n \to +\infty$
donc les deux séries à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+2nx)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$ ont la même nature puis $\varphi(x)$ est bien définie.

(b) Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\frac{x}{n(1+2nx)}| \leq \frac{1}{2n^2}$
la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+2nx)}$ est donc normalement, puis uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$, ce qui permet d'applique le théorème du double limite, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Problème 1

Partie I : Exemples

1. Rappelons que $t \mapsto e^{at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si $a < 0$, et que dans ce cas, $\int_0^{+\infty} e^{at}dt = \frac{-1}{a}$.
   La fonction φ_α est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a $\forall x > 0$, $\forall n > 0$, $\int_0^{+\infty} \varphi_\alpha(t)e^{-nxt}dt = \frac{-1}{nx+\alpha}$ donc φ_α est un élément de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}_n(\varphi_\alpha) = \frac{1}{nx+\alpha}$.
2. (a) La fonction C est continue sur $\mathbb{R}^+$ et et on a $\forall x > 0$, $\forall n > 0$, $\int_0^{+\infty} C(t)e^{-nxt}dt = Re(\int_0^{+\infty} e^{(-nx+i\omega)t}dt) = Re(\frac{1}{nx-i\omega}) = \frac{nx}{n^2x^2+\omega^2}$ donc C est un élément de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}_n(C)(x) = \frac{nx}{n^2x^2+\omega^2}$.
   (b) De même façon, on vérifier que S est un élément de $\mathcal{L}$ et que $\mathcal{N}_n(S)(x) = Im(\frac{1}{nx-i\omega}) = \frac{\omega}{n^2x^2+\omega^2}$.

Partie II : Comportements asymptotiques

1. La fonction f est supposée bornée sur $\mathbb{R}^+$, d'où l'existence de $M_0 = \|f\|_\infty$.
   (a) $|\mathcal{N}_n(f)(x)| \leq M_0 \int_0^{+\infty} e^{-nxt}dt = \frac{M_0}{nx} \longrightarrow 0$ quand x tend vers $+\infty$.
   (b) f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, d'où l'existence $M_1 = \|f'\|_\infty$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, donc I.p.p. est applicable :
   $$x\mathcal{N}_n(f)(x) = \frac{-1}{n}[f(t)e^{-nxt}]_0^\infty + \frac{1}{n}\int_0^\infty f'(t)e^{-nxt}dt = \frac{f(0)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\infty f'(t)e^{-nxt}dt$$
   car $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} f(t)e^{-nxt} = 0$ (produit d'une bornée et une convergente vers 0) donc $|x\mathcal{N}_n(f)(x) - \frac{f(0)}{n}| \leq M_1 \int_0^\infty e^{-nxt}dt = \frac{M_1}{nx} \longrightarrow 0$, quand $x \longrightarrow +\infty$.
2. (a) Par définition de limite, il existe $A > 0$, vérifiant : $\forall x > A$, $|f(t) - l| < 1$. La continuité de f sur le segment $[0, A]$ nous donne l'existence de $\|f\|_{\infty,[0,A]}$. Par suite, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leq \max(|l| + 1, \|f\|_{\infty,[0,A]})$.
   (b) i. Soit $x > 0$. Par changement de variable $u = xt$, on obtient que $x\mathcal{N}_n(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(\frac{t}{x})e^{-nt}dt$.
   ii. Posons $F(x,t) = f(\frac{t}{x})e^{-nt}$. On a : pour tout $x > 0$, $F(x, .)$ est continue par morceaux , la fonction $t \mapsto \lim\limits_{x \to 0^+} F(x,t) = le^{-nt}$ est continue par

morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et F et dominée par la fonction continue et intégrable $t \mapsto \|f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} e^{-nt}$. Le théorème de limite sous intégrale permet d'écrire :
$\lim\limits_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} f(\frac{t}{x})e^{-nt}dt = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{x\to 0^+} f(\frac{t}{x})e^{-nt}dt = l\int_0^{+\infty} e^{-nt}dt = \frac{l}{n}$
d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} x\mathcal{N}_n(f)(x) = \frac{l}{n}$.

3. On a $g_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{\frac{-nt}{n+1}}dt$.
Les conditions du théorème de la convergence dominée sont vérifiées :
• Les $f_n : t \mapsto f(t)e^{\frac{-nt}{n+1}}$ sont continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$.
• La suite (f_n) converge simplement vers $t \mapsto f(t)e^{-t}$ qui est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$.
• La suite de fonctions (f_n) est dominée par $t \mapsto |f(t)|$ qui est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
D'où
$$\lim_{n\to+\infty} g_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt = \mathcal{N}_1(f)(1)$$

Partie III : Quelques propriétés de $\mathcal{N}_n$

1. (a) Soit $x > 0$. L'expression $t^m e^{-\frac{nxt}{2}}$ admet une limite nulle, quand t tend vers $+\infty$, donc, par définition de la limite, il existe $B > 0$ tel que pour tout $t \geq B$, $t^m e^{-\frac{nxt}{2}}$, puis, pour tout $t \geq B$, $t^m e^{-nxt} \leq e^{-\frac{nxt}{2}}$.
   (b) g_m est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ (produit de fcts cont.) et $g_m(t)e^{-nxt} = O(|f(t)|)$, quand $t \to +\infty$, donc $t \mapsto g_m(t)e^{-nxt}$ (qui est bien continue) est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, d'où g_m est un élément de $\mathcal{L}$.
2. Posons $F(x,t) = f(t)e^{-nxt}$ et notons que $\forall m \in \mathbb{N}$, $t^m F(x,t) = O(|f(t)|)$, quand $t \to +\infty$ ($Q.1.a$).
   (a) Appliquons le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on a :
   - F admet une dérivée par rapport à x, donnée par $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -ntF(x,t)$
   - . $\forall x > 0$, $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall t \geq 0$, $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   - $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{*+}$, $\exists \varphi \in C_m(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ intégrable telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times\mathbb{R}^+ \ , \ |\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t) = nt|f(t)|e^{-ant} = O(|f(t)|)$$

On en déduit que la fonction $\mathcal{N}_n(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} F(x,t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que

$$\forall x > 0 \quad , \quad (\mathcal{N}_n(f))'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} -ntF(x,t)dt = -n\mathcal{N}_n(g_1)$$

(b) Appliquons le théorème de dérivabilité d'ordre supérieur d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

- F est dérivable k fois par rapport à x avec $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) = (-nt)^k F(x,t)$.
- $\forall j \in [|0, k-1|]$, $\forall x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial^j F}{\partial x^j}(x,t) = (-nt)^j F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall t \geq 0$, $x \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.
- $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^{*+}$, $\exists \varphi \in C_m(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ intégrable telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}^+ \quad , \quad \left| \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \varphi(t) = n^k t^k |f(t)| e^{-ant} = O(|f(t)|)$$

On en déduit que la fonction $\mathcal{N}_n(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} F(x,t)dt$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que

$$\forall x > 0 \quad , \quad (\mathcal{N}_n(f))^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} (-nt)^k F(x,t)dt = (-n)^k \mathcal{N}_n(g_k)$$

ceci est pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où $\mathcal{N}_n(f)$ est de classe C^∞.

3. (a) $f' \in \mathcal{L}$ donc $\mathcal{N}_n(f')$ existe et comme f est de C^1, alors une $I.P.P.$ nous donne :

$$\mathcal{N}_n(f') = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-nxt}dt = [f(t)e^{-nxt}]_0^{+\infty} + nx \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nxt}dt$$

f est bornée et $dlim_{t \to +\infty} e^{-nxt} = 0$ donc $[f(t)e^{-nxt}]_0^{+\infty} = -f(0)$,
d'où l'égalité cherchée.

(b) Ici f' vérifie les condition de $QIII.3.b.$, donc

$$\mathcal{N}_n(f'') = nx\mathcal{N}_n(f') - f'(0) = nx(nx\mathcal{N}_n(f) - f(0)) - f'(0)$$

.

4. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$:

- , $k = 1$ $Q.III.3.a$
- , $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$:

On suppose f est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq k$, $f^{(j)}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $f^{(k+1)}$ est un élément de $\mathcal{L}$. En appliquant $Q.III.3.a$ sur $f^{(k)}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad , \quad \mathcal{N}_n((f^{(k)})')(x) = nx\mathcal{N}_n(f^{(k)})(x) - f^{(k)}(0)$$

Et l'hypothèse de récurrence permet de déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad , \quad \mathcal{N}_n(f^{(k+1)})(x) = (nx)^{k+1}\mathcal{N}_n(f)(x) - \sum_{i=1}^{k+1}(nx)^{i-1}f^{(k+1-i)}(0)$$

Partie IV : Injectivité de $\mathcal{N}_n$

1. (a) Soit $P(t) = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k$. On a :

$$\int_0^1 P(t)h(t)dt = \sum_{k=0}^{p} a_k \int_0^1 t^m h(t)dt = 0$$

(b) Par théorème de Weierstrass, la fonction réelle continue h sur $[0,1]$ est une limite uniforme d'une suite $(P_i)_i$ de polynômes réels sur $[0,1]$. Cette convergence uniforme permet de déduire celle de hP_i vers h^2 (h est bornée) et aussi d'écrire :

$$\int_0^1 h^2(t)dt = \int_0^1 \lim_{i\to+\infty} P_i(t)h(t)dt = \lim_{i\to+\infty} \int_0^1 P_i(t)h(t)dt = 0$$

On en conclut par positivité stricte que h est nulle sur $[0,1]$.

2. Soit f un élément de $\mathcal{L}$, on pose pour tout $t \geq 0$, $h_n(t) = \int_0^t e^{-nu}f(u)du$.

(a) La fonction h_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (primitive d'une fonction continue sur un intervalle) avec $h_n'(t) = f(t)e^{-nt}$ pour tout $t \geq 0$, et bornée car

$$\forall t \geq 0 \quad , \quad |h_n(t)| \leq \int_0^t |f(u)|e^{-nu}du \leq \int_0^\infty |f(u)|du < +\infty$$

et aussi $h_n' \in \mathcal{L}$ car continue et pour tout $x > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$ la fonction $t \mapsto h_n'(t)e^{-mxt} = f(t)e^{-(n+mx)t}$ est intégrable ($f \in \mathcal{L}$). Par $Q.III.3.a.$, on a :

$$\mathcal{N}_n(h_n')(x) = nx\mathcal{N}_n(h_n)(x) - h_n(0) = nx\mathcal{N}_n(h_n)(x)$$

Soit $k > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(f)(1+k) &= \int_0^\infty f(t)e^{-nt}e^{-nkt}du \\ &= \int_0^\infty h_n'(t)e^{-nkt}du \\ &= \mathcal{N}_n(h_n')(k) \\ &= nk\mathcal{N}_n(h_n)(k) \end{aligned}$$

(b) i. Soient $k \geq 0$ et $0 < x < 1$. Par le changement de variables $t = \frac{-\ln u}{n}$, on obtient :

$$\int_x^1 u^k h_n(-\frac{\ln u}{n})du = \int_0^{-\frac{\ln x}{n}} h_n(t)e^{-n(k+1)t}dt \longrightarrow n\mathcal{N}_n(h_n)(k+1) \text{ quand } x \longrightarrow 0$$

D'où la convergence de l'intégrale $\int_0^1 u^k h_n(-\frac{\ln u}{u})du$. Sa valeur est nulle car $n\mathcal{N}_n(h_n)(k+1) = \frac{1}{k+1}\mathcal{N}_n(f)(k+2) = 0$.

ii. On pose $g(t) = h_n(-\frac{\ln t}{n})$, $0 < t \leq 1$ et $g(0) = \mathcal{N}_n(f)(1)$. g est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^k g(u)du = 0$. Selon $QIV.1.b$ g est nulle sur $[0,1]$, en composant à droite par $t \mapsto e^{-nt}$, on obtient que h_n est nulle.

3. On vérifie facilement que $\mathcal{L}$ est un s.e.v. de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et que $\mathcal{N}_n$ est linéaire. Soient $f \in Ker(\mathcal{N}_n)$ et h_n une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h_n(t) = \int_0^t e^{-nu}f(u)du$. On a pour tout $k > 0$, $\mathcal{N}_n(f)(k+1) = 0$ donc h_n est nulle puis sa dérivée est nulle aussi, mais sa dérivée est donnée par : $h_n'(t) = e^{-nt}f(t)$, donc f est nulle.
On en conclut que l'application $\mathcal{N}_n$ définie sur $\mathcal{L}$ est injective.

Partie V : Application de calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \frac{\sin \omega t}{t}dt \\ &= [\frac{1-\cos \omega t}{\omega t}]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos\omega t}{\omega t^2}dt \\ &= \frac{1-\cos\omega x}{\omega x} + \int_0^x \frac{1-\cos\omega t}{\omega t^2}dt \end{aligned}$$

car $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos\omega t}{\omega t} = 0$. Comme $\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega t}{\omega t^2}dt$ est absolument convergente (car prolongeable par continuité en 0 et son expression est dominée par $\frac{1}{t^2}$ en

$+\infty$) et $\frac{1-\cos\omega x}{\omega x} = O(\frac{1}{\omega x})$ quand $x \to +\infty$, alors G admet une limite finie en $+\infty$.

À savoir : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos\omega t}{\omega t^2} dt$.

2. (a) Il est clair que g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x, m > 0$, $t \mapsto g(t)e^{-mxt}$ est prolongeable en 0 et négligeable devant $t \mapsto e^{-mxt}$ en $+\infty$ donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que $g \in \mathcal{L}$.Par $QIII, 2.a.$, on a , pour tout $x \geq 0$:

$$(\mathcal{N}_n(g))'(x) = -n\mathcal{N}_n(g1)(x) = -n\sin(\omega t)e^{-nxt}dt = -n\mathcal{N}_n(S)(x) = \frac{-n\omega}{n^2x^2+\omega^2}$$

En primitivant, on obtient : $\mathcal{N}_n(g)(x) = -\arctan(\frac{nx}{\omega}) + cte$.

On a g est bornée car continue de limite nulle en $+\infty$, donc, d'après $Q.II.1.a.$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{N}_n(g)(x) = 0$ d'où $cte = \frac{\pi}{2}$.

On en conclut que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\mathcal{N}_n(g)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan((\frac{n}{\omega})x)$.

(b) i. G est de classe C^1 et bornée sur $\mathbb{R}^+$ (limite finie en $+\infty$) telle que $G' = g \in \mathcal{L}$ et $G(0) = 0$. D'après $Q.III.3.a.$, on a :

$$x \in \mathbb{R}^{*+} \ , \ \mathcal{N}_n(g)(x) = nx\mathcal{N}_n(G)(x) - G(0) = nx\mathcal{N}_n(G)(x)$$

ii. Rappelons que : $l = \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_n(g)(x) - l &= nx\mathcal{N}_n(G)(x) - lnx\int_0^{+\infty} e^{-nxt}dt \\
&= nx\left(\int_0^{+\infty} e^{-nxt}(G(t)-l)dt\right) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(G\left(\frac{u}{nx}\right) - l\right)du
\end{aligned}$$

Puisque $e^{-u}\left(G\left(\frac{u}{nx}\right) - l\right) \to 0$, quand $x \to 0^+$ pour tout $u \in \mathbb{R}^{*+}$
et pour tout $u > 0$ et tout $x > 0$, $\left|e^{-u}\left(G\left(\frac{u}{nx}\right) - l\right)\right| \leq e^{-u}(\|G\|_\infty + |l|)$, qui l'xpression d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to0^+} \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(G\left(\frac{u}{nx}\right) - l\right)du = 0$$

par suite : $\lim\limits_{x\to0^+} \mathcal{N}_n(g)(x) = l$.

La question $QV.2.a.$ permet de calculer cette limite autrement, ce qui donne, par unicité de limite :

$$l = \frac{\pi}{2}$$

La fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, d'après $QII.3.$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g(t)e^{\frac{-nt}{n+1}}dt = \mathcal{N}_1(g)(1) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-t}dt =$$

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{t}dt$.

Partie VI : Application à la résolution des équations différentielles

Soit m un entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire d'ordre m, à coefficients constants :

$$(E) \qquad a_0y^{(m)} + a_1y^{(m-1)} + ... + a_my = f(t),$$

avec les conditions initiales : $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, $y^{(m-1)}(0) = y_{m-1}$, avec $(a_0, a_1, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $a_0 \neq 0$, $(y_0, y_1, ..., y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ et $f \in \mathcal{L}$. On voudrait trouver la solution de $y = y(t)$ pour $t \geq 0$ de (E).

1. Je ne vois pas comment je pourrai calculer la transformé de Laplace de y si ce dernier n'est pas un élément de $\mathcal{L}$, et même si $y \in \mathcal{L}$ je ne trouve pas de manière pour répondre à cette question sans passer par $Q.II.4.$, pour cela je suppose que la solution y (qui est en particulier de classe C^m) vérifie les conditions suivantes :
   - $y, y', ..., y^{(m-1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.
   - $y', ..., y^{(m)}$ sont dans $\mathcal{L}$.

   Par linéarité de $\mathcal{N}_n$, on a :

   $$a_0\mathcal{N}_n(y^{(m)}) + a_1\mathcal{N}_n(y^{(m-1)}) + ... + a_m\mathcal{N}_n(y) = \mathcal{N}_n(f)$$

   Par $Q.II.4.$, on a :

   $$\forall k = 1, ..., m \ , \ \forall x \geq 0 \ , \quad \mathcal{N}_n(y^{(k)})(x) = (nx)^k\mathcal{N}_n(y)(x) - \sum_{i=1}^{k} y_{k-i}(nx)^{i-1}$$

   donc

   $$\sum_{k=1}^{m} a_k\mathcal{N}_n(y^{(n-k)})(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(nx)^k\mathcal{N}_n(y)(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k\sum_{i=1}^{k} y_{k-i}(nx)^{i-1}$$

   On pose $\varphi_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(nx)^{m-k}$ et $\psi_{n,m-1}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k\sum_{i=1}^{k} y_{k-i}(nx)^{i-1}$. les conditions sur le degré sont justifiées par la forme et $a_0 \neq 0$, et on a bien la formule :

$$\mathcal{N}_n(y)(x) = \frac{\psi_{n,m-1}(x)}{\varphi_{n,m}(x)} + \frac{\mathcal{N}_n(f)(x)}{\varphi_{n,m}(x)}$$

2. On a : $\mathcal{N}_1(y'')(x) = x^2\mathcal{N}_1(y)(x) - x - 2 \quad , \quad \mathcal{N}_1(y')(x) = x\mathcal{N}_1(y) - 1$
en prenant $f(x) = 2e^{\frac{-3t}{2}}$, on trouve : $\mathcal{N}_1(f)(x) = \frac{2}{x+\frac{3}{2}}$ $\qquad (Q.I.2.b.)$
En appliquant $\mathcal{N}_1$ sur l'équation $y'' + 3y' + 2y = 2e^{\frac{-3}{2}t}$, et effectuant une décomosition en éléments simples, on obtient
$$\mathcal{N}_1(y) = \frac{1}{x+2} + \frac{8}{x+1} - \frac{8}{x+\frac{3}{2}}$$
Par $(Q.I.2.b.)$, on a : $\frac{1}{x+2} + \frac{8}{x+1} - \frac{8}{x+\frac{3}{2}} = \mathcal{N}_1(g)(x)$ avec $g(t) = e^{-2t} + 8e^{-t} - 8e^{-\frac{3t}{2}}$.
On en déduit par injectivité de $\mathcal{N}_1$ que : $y = g$.
3. En suivant la même démarche, on obtient :
$$y(t) = \frac{e^{-t}}{4} + \frac{19e^{-3t}}{20} - \frac{\cos t}{5} + \frac{\sin t}{10}$$
4. On pose $z_i = \mathcal{N}_1(y_i)$, $i = 1, 2$.
En appliquant $\mathcal{N}_1$ au système différentiel, on obtient :
$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{r} (x-1)z_1 + (x+1)z_2 = \frac{2x+2}{x+3} \\ (x+3)z_1 + (2x+1)z_2 = \frac{x^2+5x+2}{x^2+1} \end{array} \right.$$
En résolvant par pivot de Gauss, on obtient :
$$\begin{array}{rcl} z_1(x) & = & \dfrac{1}{x^2+1} \\ z_2(x) & = & \dfrac{2x^2+3x+1}{(x^2+1)(x+3)} = \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{x}{x^2+1} \end{array}$$
d'où
$$\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & \sin t \\ y_2(t) & = & e^{-3t} + \cos t \end{array}$$

Problème 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans N, lorsqu'elle existe, la fonction G_X définie par : $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$.

Partie I : Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. On a $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)=1$, donc $R=R_{cv}(\sum_{k\geq 0} t^k P(X=k))\geq 1$ puis sa somme G_X est au moins définie sur l'intervalle $[-1,1]$.
2. La somme G_X est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ avec

$$\forall k\in\mathbb{N}\ ,\ \forall x\in]-R,R[\ ,\ G_X^{(k)}(x)=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{i!}{(i-k)!}t^{i-k}P(X=i)$$

En particulier, pour $k\in\mathbb{N}$, $G_X^{(k)}(0)=k!P(X=k)$.

3. (a) Si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$, alors $G_X(t)=1-p+pt$, pour tout $t\in\mathbb{R}$.
   (b) Si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$, alors $G_X(t)=(1-p+pt)^n$, pour tout $t\in\mathbb{R}$.
   (c) Si $X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$, alors $G_X(t)=\frac{pt}{1-(1-p)t}$, pour tout $|t|<\frac{1}{1-p}$.
4. Comme $R\geq 1$ alors G_X est continue sur $[-1,1]$ et de classe C^∞ sur $]-1,1[$. La restriction de sa dérivée seconde sur $[0,1[$ est positive, ce qui implique que G'_X est croissante et sa limite en 1^- existe dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ (Théorème de la limite monotone). Notons cette limite par l.

   • Si $l\in\mathbb{R}$ alors G_X est dérivable en 1 (prolongement dérivable) avec $G'_X(1)=l$. Pour $0\leq x<1$, $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}P(X=k)\leq G'_X(x)\leq G'_X(1)$ (G'_X est $\nearrow$)
   La suite $(\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}P(X=k))_n$ est $\nearrow$ et majorée donc elle converge. La convergence de cette suite assure la convergence normale (puis uniforme) de la série
   $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}P(X=n)$ sur $[0,1]$. En permutant les signes $\int$ et $\sum$, on obtient :

$$G'_X(1)=\lim_{t\to 1^-}G'_X(t)=\lim_{t\to 1^-}\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}P(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)=E(X)$$

   • Si $l=+\infty$, on considère un réel $A>0$ quelconque. Par définition de la limite, il existe un $0<x<1$ assez proche de 1 tel que $G'_X(x)>A$ comme $G'_X(x)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}P(X=k)$, alors, à partir d'un certain rang N, on a $\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)\geq\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}P(X=k)>A$, ceci pour tout $A>0$ d'où $E(X)=+\infty$.

5. Supposons que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2.
En particulier $E(X)$ est finie donc G'_X est de classe C^1 (en fait le théorème de prolongement dérivable nous donne que la fonction est de classe C^1 au point de prolongement) .
Pour $0 < x < 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{G'_X(x) - G'_X(1)}{x-1} &= \frac{1}{x-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}P(X=k) - \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k)\right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k\frac{x^{k-1}-1}{x-1}P(X=k) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k)\end{aligned}$$

Puisque $\forall n \geq 2 \quad , \quad |k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k)| \leq k(k-1)P(X=k)$
et $\sum_{k\geq 2} k(k-1)P(X=k)$ est convergente de somme $E(X(X-1))$,
alors la série $\sum_{k\geq 2} k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k)$ converge normalement sur $[0,1]$
puis

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{G'_X(x) - G'_X(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=2}^{\infty} k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P(X=k) = E(X(X-1))$$

On en déduit que G'_X est dérivable en 1 et que

$$V(X) = E(X(X-1)) - E(X)^2 + E(X) = G''_X(1) - (G'_X(1))^2 + G'_X(1)$$

Réciproquement, si G_X est supposée deux fois dérivable en 1, sa première dérivabilité première, nous donne que G'_X est continune sur $[0,1]$, elle est déjà dérivable sur [0,1[, donc par $T.A.F$:

$$\forall x \in]0,1[\;, \quad \frac{G'_X(x) - G'_X(1)}{x-1} = \sum_{k=2}^{\infty} k\frac{x^{k-1}-1}{x-1}P(X=k) \sum_{k=2}^{\infty} k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k)$$

et et Fixons un entier $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k) = \lim_{t\to 1^-} \sum_{k=2}^{n} k(k-1)t^{k-2}P(X=k) \leq \lim_{t\to 1^-} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^{k-2}P(X=k) = G''_X(1)$$

Ceci pour tout $n \geq 2$, d'où l'existence de $E(X(X-1))$, puis $E(X^2)$.

6. Si $0 < p < 1$ alors $\frac{1}{1-p} > 1$ puis G_X admet un moment d'ordre 2. Comme

$$G'_X(t) = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2} \quad , \quad G''_X(t) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^3}$$

alors $\qquad E(X) = \frac{1}{p}$ et $\frac{1-p}{p^2}$.

Partie II : La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

1. Soit $|t| < R$ avec R est le plus petit des rayons de convergence de touts les séries entières dont les sommes seront $G_{X_1}, ..., G_{X_k}$ et $G_{X_1+...+X_k}$.
   Comme $X_1, ..., X_k$ sont indépendantes alors les variables $t^{X_1}, ..., t^{X_k}$ le sont aussi (indépendances héritées) puis

$$G_{X_1+...+X_k}(t) = E(t^{X_1+...+X_k}) = E(\prod_{i=1}^{k} t^{X_i}) = \prod_{i=1}^{k} E(t^{X_i}) = \prod_{i=1}^{k} G(X_i)$$

   Les X_i ont la même loi que X, donc $G_{X_1+...+X_k} = \prod_{i=1}^{k} G(X_i) = G_X^k$.

2. (a) On a : $\quad E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y)$ et par probabilités totales, on a :

$$\forall y \in Y(\Omega) \ , \ P(Y = y) = \sum_{k=1}^{n} P(Y = y, N = k) = \sum_{k=1}^{n} P(Y = y|N = k)P(N = k)$$

   on peut permuter les $\sum$ qui sont finis pour avoir :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k) \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y|N = k) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k)E(Y|[N = k])$$

   (b) Soient $k \in [|1, n|]$ et $t \in \mathbb{R}$. On pose $Y = t^S$, on a :

$$\begin{aligned}
E(t^S|[N = k]) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y|N = k) \\
&= \sum_{s \in S(\Omega)} t^s P(S = s|N = k) \\
&= \sum_{s \in (\sum_{i=1}^{k} X_i)(\Omega)} t^s P(S = \sum_{i=1}^{k} X_i = s) \\
&= G_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t) \\
&= G_X^k(t)
\end{aligned}$$

(c) Pour tout réel t , $G_S(t) = E(t^S) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k)E(Y|[N = k]) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k)G_X^k(t)$.

(d) Pour tout réel t ,

$G_N(G_X(t)) = \sum_{k=1}^{n} (G_X(t))^k P(N = k) = G_S(t)$, d'où $G_S = G_N \circ G_X$.

3. Les fonctions polynomiales sont dérivables, donc, pour tout réel t , $G'_S(t) = G'_N(G_X(t)).G'_X(t)$, en prenant $t = 1$ et utilisant $Q.I.4$, on obtient $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III : Application

1. (a) Le jeton est non truqué donc $P(N = 1) = P(N = 2) = 0,5$.

(b) • $k = 1$: Dans ce cas, on lance le dé une seule fois donc les événements sont équiprobables :

$$\forall i = 1, ..., 4 \ , \ P(S = i \mid N = 1) = 0,25$$

• $k = 2$: Dans ce cas, on lance le dé deux fois, donc $S = X_1 + X_2$, par indépendance de X_1 et X_2, on aura, pour tout $i = 2, ..., 8$:

$$P(S = i \mid N = 2) = \sum_{\substack{1 \leq j,l \leq 4 \\ j+l=i}} P(X_1 = j)P(X_2 = l) = \sum_{\substack{1 \leq j,l \leq 4 \\ j+l=i}} \frac{1}{16} = \frac{\min(i-1, 9-i)}{16}$$

(c) Par probabilités totales, on a :

$$\forall i = 1, ..., 8 \ , \ P(S = i) = P(S = i \mid N = 1)P(N = 1) + P(S = i \mid N = 2)P(N = 2)$$

En utilisant les calculs précédents, on obtient :

$$\begin{array}{l} P(S=1) = \frac{4}{32} \ , \ P(S=2) = \frac{5}{32} \ , \ P(S=3) = \frac{6}{32} \ , \ P(S=4) = \frac{7}{32} \\ P(S=5) = \frac{4}{32} \ , \ P(S=6) = \frac{3}{32} \ , \ P(S=7) = \frac{2}{32} \ , \ P(S=8) = \frac{1}{32} \end{array}$$

L'espérance de S est donnée par :

$$E(S) = \sum_{i=1}^{8} iP(S = i) = \frac{15}{4}$$

Le moment d'ordre 3 de S est donnée par :

$$E(S^2) = \sum_{i=1}^{8} i^2 P(S=i) = \frac{35}{2}$$

D'où $V(S) = E(S^2) - E(S)^2 = \frac{55}{16}$.

2. (a) On prend $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,2,3,4\})$.

   (b) Pour tout réel t, on a :

$$G_N(t) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} \quad , \quad G_X(t) = \frac{t}{4} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{2}$$

   (c) Pour tout réel t, on a :

$$G_S(t) = G_N(G_X(t)) = \frac{t}{8} + \frac{5t^2}{32} + \frac{3t^3}{16} + \frac{7t^4}{32} + \frac{t^5}{8} + \frac{3t^6}{32} + \frac{t^7}{16} + \frac{t^8}{32}$$

   On retrouve la loi, l'espérance et la variance de S, en utilisant les relations :

$$P(S=i) = \frac{G_S^{(i)}(0)}{i!} \quad , \quad E(S) = G'_S(1) \quad , \quad V(S) = G''_S(1) + G'_S(1) - G'_S(1)^2$$

Pour vos remarques , merci de me contacter sur

taoufiki-maths@hotmail.fr