Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1 :

Soient $U(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \succ 0,\ U(x)\cos(x) + V(x)\sin(x) = 0$$

Montrer que $U(X) = 0$ *et* $V(X) = 0$

Exercice 2 :

Déterminer le degré du polynôme $P_n(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

Montrer que :

1) $\forall (m,n,p) \in \mathbb{N}^3,\ (1+X+X^2)/(X^{3m}+X^{3n+1}+X^{3p+2})$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X^2/\left((X+1)^n - nX - 1\right)$

3) $(X^2 - \sqrt{2}X + 1)/(X^{32} - 1)$

Exercice 4 :

Factoriser dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ les polynômes : $X^3 \pm 1,\ X^4 \pm 1,\ X^5 \pm 1,\ X^6 \pm 1$

Exercice 5 :

Considérons le polynôme $P(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4$.

1) Calculer $P(1+i)$.

2) En déduire toutes les racines complexes de $P(X)$, ainsi que sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Déterminer tous les polynômes $P(X)$ vérifiant :

1) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

2) $P \circ P = P$

Polynôme classiques

Exercice 7 : (Polynômes de Tchebychev)

Considérons la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$

1) a) Déterminer T_2 *et* T_3.
   b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $deg(T_n)$ et $cd(T_n)$ (le coéfficient dominant).
   c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

   d) En déduire $T_n(1)$ et $T_n'(1)$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Déterminer les racines de T_n appartenant à $[-1, 1]$. Combien y'en a-t-il ?
   b) En déduire toutes les racines complexes de T_n.

Exercice 8 : (Polynômes de Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux.

Notons pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $L_k(X) = \displaystyle\prod_{0 \preceq j \preceq n,\ j \neq k} \left(\frac{X - a_j}{a_k - a_j}\right)$

1) Que vaut $deg(L_k)$?
2) Soient $k, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Calculer $L_k(a_i)$.
3) Soient $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$.
   a) Montrer que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k L_k$ est l'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant : $\forall\ 0 \preceq i \preceq n,\ P_n(a_i) = y_i$
   b) Déterminer, en fonction de P_n, tous les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant : $\forall\ 0 \preceq i \preceq n,\ Q(a_i) = y_i$
4) Montrer que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k(X)$
5) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k = 0$.

   Montrer que $\forall\ k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \alpha_k = 0$.
   NB : $(L_k)_{0 \preceq k \preceq n}$ *sera dite famille libre de* $\mathbb{K}_n[X]$. *(Voir plus loin)*

Exercice 9 : (Polynômes de Legendre)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n(X) = \left((X^2 - 1)^n\right)^{(n)}$.

1) Préciser le degré de P_n ainsi que son coéfficient dominant.
2) Préciser les racines de $(X^2 - 1)^n$ ainsi que leurs multiplicités.
3) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\left((X^2 - 1)^n\right)^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans $]-1, 1[$.
   (Vous pouvez raisonner par récurrence sur k)

4) En déduire que $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ possède exactement n racines distinctes dans $]-1,1[$.

5) Montrer que
$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)dt = 0$$

Exercice 10 : (Polynômes de Laguerre)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $L_n(x) = e^x(e^{-x}x^n)^{(n)}$.

1) Montrer que L_n est une fonction polynomiale.

2) Déterminer le degré de L_n, ainsi que son coéfficient dominant.

Exercice 11 :

1) Déterminer toutes les racines complexes de $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$, sachant que la somme de deux de ses racines est égale à la troisième.

2) Déterminer tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ vérifiant $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 1/x+1/y+1/z=1 \\ xyz=-4 \end{cases}$

Exercice 12 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

1) Donner la décomposition primaire de $P_n(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

Exercice 13 :

1) Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ à coéfficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $a_0 \times a_n \neq 0$.
Supposons que $r = p/q$ est une racine rationnelle de P sous forme irréductible.
Montrer que p/a_0 et q/a_n.

2) Déterminer alors toutes les racines du polynôme $2X^3 - X^2 - 13X + 5$

Exercice 14 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence suivante :
$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0\ \right) \Leftrightarrow \left(\exists (A,B) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ P = A^2 + B^2\ \right)$$

FRACTIONS RATIONELLES

Exercice 15 :

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$A)\ \frac{X^3}{X^2-3X+2}$	; $B)\ \frac{X+1}{(X+2)(X-1)^2}$
$C)\ \frac{X^5+1}{(X^2-X)^2}$	; $D)\ \frac{X^3+1}{X^3-1}$ *dans* $\mathbb{C}(X)$ *et* $\mathbb{R}(X)$
$E)\ \frac{X^4+X+1}{X(X^2+1)^3}$	; $F)\ \frac{X^{n-1}}{X^n-1}$ *dans* $\mathbb{C}(X)$
$G)\ \frac{1}{X^n-1}$ *dans* $\mathbb{C}(X)$	; $H)\ \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ *dans* $\mathbb{C}(X)$
$I)\ \frac{1}{X^{2n}-1}$ *dans* $\mathbb{C}(X)$ *et* $\mathbb{R}(X)$	; $J)\ \frac{1}{(X-1)(X-2)...(X-n)}$

Exercice 16 :

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (P'(x)^2 - P(x)P''(x)) \geq 0$$

Exercice 17 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ distincts deux à deux.

Posons $P(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$.

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^j}{P'(x_k)}$, et ce pour tout $0 \leq j \leq n-1$.