

## Exercice 1

$$1) i) A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2^{\textcolor{red}{1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{\textcolor{red}{1}} A$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 2^{\textcolor{red}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{\textcolor{red}{2}} A$$

On devine que

$$\left( \forall n \geq 1 ; A^n = 2^{\textcolor{red}{n-1}} A \right)$$

ii) On montre par récurrence que :

$$\left( \forall n \geq 1 ; A^n = 2^{\textcolor{red}{n-1}} A \right)$$

Initialisation : Pour  $n=1$

$$\text{On a } \begin{cases} A^1 = A \\ 2^{1-1} A = 2^0 A = 1 \cdot A = A \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underbrace{(A^1 = 2^{1-1} \cdot A)}$$

Hérédité : Soit  $n \geq 1$ .

$$\text{Supp que : } A^n = 2^{\textcolor{red}{n-1}} A$$

$$\text{Il faut que : } A^{n+1} = 2^{\textcolor{red}{n}} A$$

$$\begin{aligned} \text{On a } A^{n+1} &= A^n \cdot A \\ &= (2^{\textcolor{red}{n-1}} A) \cdot A \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= 2^{\textcolor{red}{n-1}} A^2 \\ &= 2^{\textcolor{red}{n-1}} (2A) \quad (\text{car } A^2 = 2A) \\ &= \underline{2^{\textcolor{red}{n}} A} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Q.C. :  $\forall n \geq 1$  ✓



2) On a  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A + I_2$

Soit  $n \geq 1$ . On a:

$$\begin{aligned}
 B^n &= (A + I_2)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k I_2^{n-k} \quad \left( \begin{array}{l} \text{via le binôme de} \\ \text{Newton car } A \\ \text{et } I_2 \text{ commutent} \end{array} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k \left( I_2^{n-k} = I_2 \right) \\
 &= \binom{n}{0} A^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^k \\
 &= I_2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} A \\
 &= I_2 + \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} \right) A
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( (2+1)^n - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} (3^n - 1)
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$B^n = \frac{3^n - 1}{2} \cdot A + I_2$$

Fin

→ Vous pouvez écrire  $B^n$  sous forme de bloc matriciel



## Exercice 2

1) i) Par récurrence:

$$\forall k \in \mathbb{N}, (I_n + A)^k = I_n + kA$$

Initialisation: Pour  $k=0$

$$\text{On a } \begin{cases} (I_n + A)^0 = I_n \\ \text{et} \\ I_n + 0A = I_n \end{cases}$$

$$\text{Donc } (I_n + A)^0 = I_n + 0A$$

Hérédité: Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Supp que } (I_n + A)^k = I_n + kA$$

$$\text{M que } (I_n + A)^{k+1} = I_n + (k+1)A$$

$$\begin{aligned} \text{On a } (I_n + A)^{k+1} &= (I_n + A)^k (I_n + A) \\ &= (I_n + kA) (I_n + A) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= I_n + A + kA + kA^2 \\ &= I_n + (k+1)A \quad (\text{car } A^2 = 0) \\ &\quad \text{(Q.F.D.)} \end{aligned}$$

ii) via le binôme de Newton:

$$\begin{aligned} \text{On a } (I_n + A)^k &= \sum_{i=0}^k C_k^i A^i I_n^{k-i} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Car } A \text{ et } \\ I_n \text{ commutent} \end{array} \right) \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i A^i \quad (\text{car } I_n^{k-i} = I_n) \end{aligned}$$

$$\text{Et on a } A^2 = 0, \text{ alors } (\forall i \geq 2, A^i = 0)$$

Ainsi:

$$(I_n + A)^k = \sum_{i=0}^1 C_k^i A^i$$



$$= C_k^0 A^0 + C_k^1 A^1$$

$$= \underbrace{I_n + kA}_{\text{(QFD)}} \quad \left( \text{car } C_k^0 = 1; C_k^1 = k; A^0 = I_n \right)$$

2°) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On veut calculer  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k$ .

On pense à appliquer 1°)

$$\text{On a } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k = (I_2 + A)^k; \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Et on a  $A^2 = 0$ , alors d'après 1°, on a :

$$(I_2 + A)^k = I_2 + kA$$

Ainsi  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k = I_2 + kA$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & 4k \\ -k & -2k \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2k+1 & 4k \\ -k & -2k+1 \end{pmatrix}$$

Fin



### Exercice 3

1) i)  $A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

Et on a  $(A - I_2)^2 = 0$

D'où  $(A - I_2)$  est nilpotente.

ii) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On veut  $A^n = ?$

On pensera au binôme de Newton

On a  $A^n = (I_2 + (A - I_2))^n$

Posons  $N = A - I_2$ , on a :

$$A^n = (I_2 + N)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_2^{n-k} \quad \left( \begin{array}{l} \text{car } N \text{ et } I_2 \\ \text{commutent} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \quad (\text{car } I_2^{n-k} = I_2)$$

$$= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 \quad (\text{car } \forall k \geq 2, N^k = 0)$$

$$= I_2 + nN$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+4n & -4n \\ 4n & 1-4n \end{pmatrix}$$

2) i) On a  $A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5u_n - 4v_n \\ 4u_n - 3v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$



ii) Notons  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A X_n)$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0)$$

Qu'on montre facilement par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4n & -4n \\ 4n & 1-4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 1 \\ v_n = 1 \end{cases}$$

Fin



### Exercice 4 :

1) On a  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Alors  $B^2 = 0$  (faites vos calculs)

2) On a  $B = A - I_3$  et  $B^2 = 0$

$$\Rightarrow (A - I_3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A + I_3 = 0$$

$$\Rightarrow A(A - 2I_3) = -I_3$$

$$\Rightarrow A(2I_3 - A) = I_3$$

Donc A est inversible et que  $A^{-1} = 2I_3 - A$

3) On veut  $A^n = ?$

On pense encore à utiliser le binôme de Newton

On a :  $A^n = (B + I_3)^n$  (car  $B = A - I_3$ )

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k B^k I_3^{n-k} \quad (BI_3 = I_3B)$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k B^k \quad (I_3^{n-k} = I_3)$$

$$= C_n^0 B^0 + C_n^1 B^1 \quad (\forall k \geq 2, B^k = 0)$$

$$A^n = I_3 + nB$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+n & n & 3n \\ 2n & 1+2n & 6n \\ -n & -n & 1-3n \end{pmatrix}$$

Fin



## Exercice 5

1) i)  $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$

ii) On a  $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$

$$\Rightarrow A \left[ \frac{1}{2} (3I_2 - A) \right] = I_2$$

D'où  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{1}{2} (3I_2 - A)$

2) i) On a 
$$\begin{cases} X^n = (X^2 - 3X + 2) Q(X) + R(X) \\ \text{avec } \deg(R(X)) < \deg(X^2 - 3X + 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^n = (X^2 - 3X + 2) Q(X) + (aX + b) \\ \text{où } a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1 et 2 les racines de  $(X^2 - 3X + 2)$

Alors 
$$\begin{cases} X=1 \Rightarrow a+b=1 \\ X=2 \Rightarrow 2a+b=2^n \end{cases}$$

On résout le système  $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2^n \end{cases}$ .

On trouve 
$$\begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

Le reste demandé est  $(2^n - 1)X + (2 - 2^n)$

On a :  $X^n = (X^2 - 3X + 2) Q(X) + [(2^n - 1)X + (2 - 2^n)]$

Remplaçons  $X$  par  $A$ , on obtient :

$$A^n = \underbrace{(A^2 - 3A + 2I_2)}_{=0} Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$$

D'où 
$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2 = (*)$$



## Exercice 6

10) i) Montrer que  $A$  n'est pas inversible.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $A$  est inversible.

On a  $A^n = 0$

On sait que le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible.

Alors puisque  $A$  est inversible, il en est de même

pour  $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}} = A^n$

D'où  $0$  est inversible

Ce qui est absurde

{ 2<sup>ème</sup> méthode }

1) i) 2<sup>ème</sup> méthode

1. que  $A$  n'est pas inversible

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $A$  est inversible

Alors  $\exists B \in M_n(\mathbb{C})$  tq  $AB = I_n$

alors  $(AB)^r = I_n^r$

$$\Rightarrow A^r B^r = I_n \quad \left( \begin{array}{l} \text{car } B = A^{-1} \text{ et } A \cdot A^{-1} = A^{-1} A \\ A \cdot B = B \cdot A \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow 0 \cdot B^r = I_n \quad \text{car } A^r = 0$$

$$\Rightarrow I_n = 0_n \quad \text{ce qui est absurde}$$

D'où  $A$  n'est pas inversible



$$\text{ii) On a } I_n = I_n - A^n \text{ (car } A^n = 0) \\ \Rightarrow I_n = (I_n - A)(I_n + A + \dots + A^{n-1}) \text{ (car } I_n \text{ et } A \text{ commutent)}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} (I_n - A) \text{ est inversible} \\ (I_n - A)^{-1} = I_n + A + \dots + A^{n-1} \end{cases}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible ?}$$

On sait que si  $A$  est nilpotente alors  $(I - A)$  inversible

$$\text{On a } B = (I_4 - A); \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que  $B = (I_4 - A)$  est inversible, il suffit de vérifier que  $A$  est nilpotent.

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{A^3 = 0}$$

Donc  $B = (I_3 - A)$  est inversible et que

$$\boxed{B^{-1} = (I_3 - A)^{-1} = I_3 + A + A^2}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fin



## Exercice 7

$$\begin{aligned}
 1^\circ) R_\theta \cdot R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -\cos \theta \sin \theta' - \sin \theta \cos \theta' \\ \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta' & \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\
 &= R_{\theta + \theta'}
 \end{aligned}$$

$$2^\circ) R_\theta \cdot (?) = I_2$$

Remarquons que  $I_2 = R_0$

$$\text{Alors } R_\theta R_{(-\theta)} = R_0 = I_2$$

$$\text{D'où } R_\theta \text{ est inversible et } (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$$

$$3^\circ) (R_\theta)^n = R_?$$

$$\text{On a } (R_\theta)^2 = R_\theta R_\theta = R_{\theta + \theta} = R_{2\theta}$$

$$(R_\theta)^3 = (R_\theta)^2 R_\theta = R_{2\theta} R_\theta = R_{2\theta + \theta} = R_{3\theta}$$

On conjecture que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, (R_\theta)^n = R_{n\theta})$



On la montre facilement par récurance (fin)

Question: Cette égalité est-elle vraie aussi pour  $n=0$ ?

$$4^o) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{2}}$$

et appliquons 3°, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_{\frac{\pi}{2}} = \left( R_{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right)^n$$

$$\boxed{A = R_{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \text{ convient}}$$

(fin)

~~fin~~