Problème : Solution

Partie 1

1) a) Voir cours

1) b) NON ; Contre-exemple :

$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

$\chi_S(X) = X^2$; $Sp(S) = \{0\}$.

S n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$; en effet :
Supp. que S diagonalisable dans $\mathbb{C}$,
alors S est semblable à diag(0,0)
$\Rightarrow S = 0$; ce qui est absurde

2) a) Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$.

On a $S(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \varepsilon_i$

$\Rightarrow R_S(x) = \langle S(x)|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i$

2) b) Soit $x \in S(0,1)$ (c.à.d $\|x\| = 1$)
M. que $R_S(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$:

$R_S(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$; où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$.

$\forall 1 \leq i \leq n$, $\lambda_1 x_i^2 \leq \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n x_i^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2}_{= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}_{= R_S(x)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2}_{= \lambda_n \|x\|^2 = \lambda_n}$$

D'où $\lambda_1 \leq R_S(x) \leq \lambda_n$ CQFD

3) a) i) Supp. que S symétrique positif.
Soit $\lambda \in Sp(S)$. M. que $\lambda \geq 0$:

Soit e un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

On a :
$\langle S(e)|e\rangle \geq 0$ (car S sym positif)

$\Rightarrow \langle \lambda e|e\rangle \geq 0$

$\Rightarrow \lambda \underbrace{\|e\|^2}_{>0} \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda \geq 0}$

ii) Si S symétrique défini positif et $\lambda \in Sp(S)$ alors $\lambda > 0$;
La démo est similaire.
On a arrive à : $\lambda \|e\|^2 > 0$
et on conclut que $\lambda > 0$ car $\|e\|^2 > 0$

3/b) i) $\text{mat}_B(S) = (S_{ij})_{i,j}$. On a $S(e_j) = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} e_i$

$\Rightarrow S_{ij} = \langle S(e_j)|e_i\rangle$
Car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E

ii) $S_{ii} = \langle S(e_i)|e_i\rangle = R_S(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$
Car $e_i \in S(0,1)$, et en vertu de la question 2/b/

Partie II

1) $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^n$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique admise.

Avec $tr(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, on conclut

2) i) $S_\alpha \in S_n^+(\mathbb{R})$; en effet :

a) S_α matrice symétrique :

${}^t(S_\alpha) = {}^tD \cdot {}^tS \cdot D = {}^tD \cdot S \cdot D = S_\alpha$

b) Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{R})$. M.q ${}^tX \cdot S_\alpha \cdot X \geq 0$

${}^tX \cdot S_\alpha \cdot X = {}^tX \cdot {}^tD \cdot S \cdot D \cdot X = {}^t(DX) \cdot S \cdot (DX) \geq 0$
car $S \in S_n^+(\mathbb{R})$

2) ii) $tr(S_\alpha) = ?$

$$tr(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (S_\alpha)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ({}^tD.S.D)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (D.(SD))_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} D_{ij} . (SD)_{ji} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (SD)_{ii} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car :} \\ \forall j \neq i, D_{ij} = 0 \\ D_{ii} = \alpha_i \end{array} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} S_{ij} \; D_{ji} \right)}_{= \alpha_i \; S_{ii} \text{ ; comme plus haut}}$$

$$tr(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 S_{ii}$$

---

3) On a : $\forall 1 \leq i \leq n, \; \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{S_{ii}}}$.

Notons : $\begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ et } D = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ S_\alpha = {}^tD . S . D \end{cases}$

D'après 2°/, on a que $\begin{cases} S_\alpha \in S_n^+(\mathbb{R}) \\ tr(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 S_{ii} \end{cases}$

avec $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{S_{ii}}}$, on a $\boxed{tr(S_\alpha) = n}$.

D'autre part, $S_\alpha \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors grâce à 1°, on a l'inégalité :

$$det(S_\alpha) \leq \left(\frac{1}{n} tr(S_\alpha) \right)^n$$

$$\Rightarrow det(S_n) \leq 1 \quad (\text{car } tr(S_\alpha) = n)$$

$$\Rightarrow det({}^tD . S . D) \leq 1$$

$$\Rightarrow det({}^tD) . det(S) . det(D) \leq 1$$

$$\Rightarrow (det(D))^2 . det(S) \leq 1$$

$$\Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^2 . det(S) \leq 1$$

$$\Rightarrow det(S) \leq \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i^2)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_i^2} \right) = \prod_{i=1}^{n} S_{ii}$$

$$\Rightarrow det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} S_{ii}$$

---

4) i) $det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n} (S_{ii} + \varepsilon)$?

$S_\varepsilon = S + \varepsilon . I_n \Rightarrow S_\varepsilon$ matrice symétrique

En plus S_ε est symétrique positive, car :

$\forall X \in M_{n1}(\mathbb{R}), \; {}^tX . S_\varepsilon . X = \underbrace{{}^tX . S . X}_{\geq 0} + \underbrace{\varepsilon}_{\geq 0} . \underbrace{{}^tX . X}_{\geq 0} \geq 0$

En plus, $\forall i, \; (S_\varepsilon)_{ii} = \underbrace{S_{ii}}_{\geq 0} + \underbrace{\varepsilon}_{> 0} > 0$

D'où (S_ε) est symétrique positive, à coefficients diagonaux strictement positifs.

$$3/ \Rightarrow det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n} (S_\varepsilon)_{ii} = \prod_{i=1}^{n} (S_{ii} + \varepsilon)$$

---

4) ii) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} S_{ii}$?

On a : $\left(\forall \varepsilon > 0, \; det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n} (S_{ii} + \varepsilon) \right)$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

on obtient :

$$det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} S_{ii} \quad (\Omega)$$

Et avec : $det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, on obtient l'inégalité voulue.

NB : Détail pour l'obtention de (Ω) :

1) Le plus facile est : $\lim_{\varepsilon \to 0} S_\varepsilon = S$ et le déterminant continue alors $\lim_{\varepsilon \to 0} det(S_\varepsilon) = det(S)$

2) Sinon, via :

$$det(S_\varepsilon) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(S_\varepsilon)_{i\sigma(i)}}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} S_{i\sigma(i)}}$$

$$\Rightarrow det(S_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} S_{i\sigma(i)} \right) = det(S)$$

Fin