Problème

Extrait de Petites mines 1995

n est un entier naturel fixé, $n \geqslant 2$.
$\mathcal{F}$ est l'esace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.
E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.
E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) \quad \text{et} \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

On note $\Delta^0 = T^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ (donc si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$, $\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}$, $T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}$.

0. Montrer que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

1. (a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme. Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
   ii. Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n noté Δ_n.
   (b) i. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Delta_n$.
   ii. En déduire le rang de Δ_n. Déterminer $\mathrm{Im}\,\Delta_n$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

   (a) i. Pour $k \geqslant 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j \geqslant 0}$.
   ii. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $\left(\Delta^j(N_k)\right)(0)$.
   (b) i. Montrer que la famille $(N_0, N_1, \ldots, N_n)$ est une base de E_n.
   ii. Soit $P \in E_n$. P s'écrit $P = a_0N_0 + a_1N_1 + \cdots + a_nN_n$, où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Exprimer les a_j en fonction des $\left(\Delta^j(P)\right)(0)$.
3. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $\left(T^k(f)\right)(x)$.
   (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.
   i. Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leqslant k \leqslant j$. (On pourra remarquer que $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$).
   ii. En déduire que $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0, 1, \ldots, j$: $f(0), f(1), \ldots, f(j)$.

Partie II

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose :

$$N(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - j) = x(x-1)\dots(x-n)$$

1. (a) Soit l'application linéaire Φ définie sur E_n à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui à P associe $(P(0), \dots, P(n))$.
   Montrer que Φ est un isomorphisme.
   (b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.
2. (a) Pour $j \in [\![0, n]\!]$, comparer $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et $\left(\Delta^j(P_f)\right)(0)$.
   (b) En déduire l'expression de P_f en fonction des $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et des polynômes N_j.

Fin & bon courage