CONCOURS COMMUN 2006

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques

(filière MPSI)

CORRECTION

Problème 1 : Analyse

Partie 2 : calcul de primitives

7) Soit x un réel strictement positif. Pour n entier naturel donné, la fonction $t \mapsto t^\alpha \ln^n(t)$ est continue sur $[1, x]$ si $x \geq 1$ ou $[x, 1]$ si $x < 1$, et on en déduit que $Z_n(x)$ existe.

$$Z_0(x) = \frac{1}{0!}\int_1^x t^\alpha \, dt = \frac{x^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1}.$$

Ensuite, les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur $[1, x]$ si $x \geq 1$ ou $[x, 1]$ si $0 < x < 1$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$Z_1(x) = \frac{1}{1!}\int_1^x t^\alpha \ln(t) \, dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{t} \, dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(x) - \frac{1}{\alpha+1}\int_1^x t^\alpha \, dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(x) - \frac{x^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2}.$$

$$\boxed{\forall x > 0, \ Z_0(x) = \frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \text{ et } Z_1(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(x) - \frac{x^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2}.}$$

8) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$. Une intégration par parties, encore licite, fournit :

$$\begin{aligned}
Z_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^{n+1}(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}(n+1)\ln^n(t)\frac{1}{t} \, dt\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^{n+1}(x) - \frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{n!}\int_1^x t^\alpha \ln^n(t) \, dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^{n+1}(x) - \frac{1}{\alpha+1}Z_n(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in]0, +\infty[, \ Z_{n+1}(x) = -\frac{1}{\alpha+1}Z_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^{n+1}(x).}$$

9) Montrons le résultat par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, d'après 7),

$$\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1} = \frac{-1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} = Z_0(x).$$

La formule de l'énoncé est donc vraie pour $n = 0$.

Soit $n \geq 0$. Supposons que $Z_n(x) = \left(\dfrac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}$. Alors, d'après 8),

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

$$\begin{aligned}
Z_{n+1}(x) &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} - \frac{1}{\alpha+1}Z_n(x)\\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} - \frac{1}{\alpha+1}\left(\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}\right)\\
&= \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{(n+1)+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{(n+1)+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1} - \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{1}\frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}x^{\alpha+1}\\
&= \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{(n+1)+1} - \left[\sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{(n+1)+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence, et donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ Z_n(x) = \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}.}$$

10) Ce qui précède montre que les fonctions $x \mapsto \ln^k(x)x^\alpha$, $0 \leq k \leq n$, admettent une primitive dans $\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$ (la fonction $x \mapsto -n!\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln^k(x)x^\alpha$ sur $]0,+\infty[$). Par linéarité, il en est de même de tout élément de $\mathcal{N}_\alpha^n$.

Partie 3 : résolution d'équations différentielles

11) Soit f une fonction de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E_1) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ xf'(x) - \alpha f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0,\ x^{-\alpha}f'(x) - \alpha x^{-\alpha-1}f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ (x^{-\alpha}f)'(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ x^{-\alpha}f(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ f(x) = Cx^\alpha.
\end{aligned}$$

12) **a)** La fonction $\exp\ :\ u \mapsto e^u$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $t \mapsto h(t)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction $k = h \circ \exp$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Pour $u \in \mathbb{R}$, on a $k'(u) = e^u h'(e^u)$ puis $k''(u) = e^u h'(e^u) + (e^u)^2 h''(e^u)$.

b) Pour $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
k''(u) - 2\alpha k'(u) + \alpha^2 k(u) &= ((e^u)^2 h''(e^u) + e^u h'(e^u)) - 2\alpha e^u h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u)\\
&= (e^u)^2 h''(e^u) + (1-2\alpha)e^u h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\forall u \in \mathbb{R},\ k''(u) - 2\alpha k'(u) + \alpha^2 k(u) = 0 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R},\ (e^u)^2 h''(e^u) + (1-2\alpha)e^u h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ x^2 h''(x) + (1-2\alpha)xh'(x) + \alpha^2 h(x) = 0.
\end{aligned}$$

c) L'équation différentielle précédente est linéaire, homogène, du second ordre, à coefficients constants. Son équation caractéristique est $z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 = 0$ ou encore $(z-\alpha)^2 = 0$. Cette équation admet la solution double $z_0 = \alpha$. Les fonctions k cherchées sont donc les fonctions de la forme $u \mapsto (\lambda u + \mu)e^{\alpha u}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

d) Mais alors, pour $x > 0$, $h(x) = k(\ln(x)) = (\lambda \ln(x) + \mu)x^\alpha = (a_0 + a_1(\ln x))x^\alpha$, $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des solutions de (E_2) est donc $\mathcal{N}_\alpha^1$.

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

13) a) $P(P(y)) = x(xy' - \alpha y)' - \alpha(xy' - \alpha y) = x(xy'' + y' - \alpha y') - \alpha(xy' - \alpha y) = x^2y'' + (1-2\alpha)xy' + \alpha^2 y$.
Par suite, $P^2(y) = 0 \Leftrightarrow y$ solution de $(E_2) \Leftrightarrow y \in \mathcal{N}_\alpha^1$ (d'après 12)d)).

b) Pour $n = 1$, on a effectivement $P^1(y) = x^1 y^{(1)} + a_0 x^0 y^{(0)}$ avec $a_0 = -\alpha$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que $P^{(n)}(y) = x^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k y^{(k)}$. Alors,

$$\begin{aligned}
P^{n+1}(y) = P(P^n(y)) &= x(x^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k y^{(k)})' - \alpha(x^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k y^{(k)}) \\
&= x(x^n y^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k y^{(k+1)} + n x^{n-1} y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} y^{(k)}) - \alpha(x^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k y^{(k)}) \\
&= x^{n+1} y^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k+1} y^{(k+1)} + n x^n y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^k y^{(k)} - \alpha(x^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k y^{(k)}) \\
&= x^{n+1} y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} x^k y^{(k)} + n x^n y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^k y^{(k)} - \alpha(x^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k y^{(k)}) \\
&= x^{n+1} y^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k y^{(k)}
\end{aligned}$$

où les b_k sont des coefficents fonctions des a_j et de α. Le résultat est démontré par récurrence.

c) D'après 11), le résultat est vrai pour $n = 1$ (et d'après 13)a), le résultat est vrai pour $n = 2$, mais il est inutile de le constater).
Soit $n \geq 1$. Supposons que l'ensemble des solutions de l'équation $P^n(y)$ soit $\mathcal{N}_\alpha^{n-1}$. Alors,

$$\begin{aligned}
P^{n+1}(y) = 0 &\Leftrightarrow P^n(P(y)) = 0 \\
&\Leftrightarrow P(y) \in \mathcal{N}_\alpha^{n-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&\Leftrightarrow \exists p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / \ P(y) = p_{n-1}(\ln x) x^\alpha \Leftrightarrow \exists p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / \ xy' - \alpha y = p_{n-1}(\ln x) x^\alpha \\
&\Leftrightarrow \exists p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / \ x^{-\alpha} y' - \alpha x^{-\alpha-1} y = \frac{1}{x} p_{n-1}(\ln x) \\
&\Leftrightarrow \exists p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / \ (x^{-\alpha} y)' = \frac{1}{x} p_{n-1}(\ln x) \ (*)
\end{aligned}$$

Les primitives de la fonction $\frac{1}{x} p_{n-1}(\ln x)$ sont de la forme $C + p_n(\ln x)$ où C est une constante réelle arbitraire et p_n un certain polynôme de degré au plus n. Donc,

$$(*) \Rightarrow x^{-\alpha} y = C + p_n(\ln x) \Rightarrow y = (C + p_n(\ln x)) x^\alpha \Rightarrow y \in \mathcal{N}_\alpha^n.$$

Réciproquement, si $y \in \mathcal{N}_\alpha^n$, il existe un certain polynôme p_n de degré au plus n tel que $y = p_n(\ln x) x^\alpha$. Mais alors,

$$(x^{-\alpha} y)' = (p_n(\ln x))' = \frac{1}{x} p_n'(\ln x),$$

où p_n' est un polynôme de degré au plus $n-1$. Par suite, $(*)$ est vérifiée. Finalement, $P^{n+1}(y) = 0$ si et seulement si $y \in \mathcal{N}_\alpha^n$.

Le résultat est démontré par récurrence.

FIN

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.

 © Jean-Louis Rouget, 2006. Tous droits réservés.