Un corrigé du concours Centrale-Supelec Maths-1- 2016 Filière MP

Mr : HAMANI Ahmed

I. Si $\rho(A) < 1$, alors $\lim A^m = 0$

I.A- Deux exemples de normes sous-multiplicatives

I.A-1) • Notons $L_1(A), ..., L_n(A)$ les lignes d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $N(A) = \max\limits_{1\le i\le n} \|L_i(A)\|_1$.

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $N(A) = 0$, alors $\forall i \in [[1, n]]$, $\|L_i(A)\|_1 = 0$, donc les lignes de A sont nulles, ce qui assure la nulleté de A.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}, A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $N(\lambda A) = \max\limits_{1\le i\le n} \|L_i(\lambda A)\|_1 =$
$= \max\limits_{1\le i\le n} \|\lambda L_i(A)\|_1 = |\lambda| \max\limits_{1\le i\le n} \|L_i(A)\|_1 = |\lambda| N(A)$.

• Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\forall i \in [[1, n]]$, $\|L_i(A + B)\|_1 = \|L_i(A) + L_i(B)\|_1 \le$
$\le \|L_i(A)\|_1 + \|L_i(B)\|_1 \le N(A) + N(B)$ et le passage au sup donne $N(A + B) \le N(A) + N(B)$.
On conclut que N est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $i \in [[1, n]], A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $L_i(AB) = \sum\limits_{j=1}^{n} |[AB]_j| = \sum\limits_{j=1}^{n} |\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}| \le \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}| =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |b_{k,j}|\right)|a_{i,k}| \le N(B)\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \le N(B)N(A)$, ce qui donne par passage au sup,
$N(AB) \le N(A)N(B)$.

I.A-2) • Pour $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, l'application $A \longmapsto Q^{-1}AQ$ est un isomorphisme, donc $\|.\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.

• Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Par sous-multiplicativité de N, on obtient :
$\|AB\| = N(Q^{-1}ABQ) = N(Q^{-1}AQQ^{-1}BQ) \le N(Q^{-1}AQ)N(Q^{-1}BQ) = \|A\|.\|B\|$.

I.B- Une conséquence de l'inégalité $\rho(A) < 1$

On se donne A dans $M_n(\mathbb{C})$, avec $\rho(A) < 1$. On veut montrer que $\lim A^m = 0$.

I.B-1) • $\widehat{T}$ est triangulaire supérieure comme produit de matrices triagulaires supérieures.

• On trouve $[\widehat{T}]_{i,j} = \begin{cases} \delta^{j-i} t_{i,j} & \text{si } i \le j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$.

• $N(\widehat{T}) = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\widehat{t}_{i,j}| = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=i}^{n} |t_{i,j}|\delta^{j-i} \le N(T) \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=i}^{n} \delta^{j-i} = N(T) \max\limits_{1\le i\le n} \dfrac{1-\delta^{n-i+1}}{1-\delta}$.

On choisit $\delta < 1$, on aura $N(\widehat{T}) \le \dfrac{1}{1-\delta}$.

Le choix $\delta < \min(1, 1 - N(T))$ entraine que $N(\widehat{T}) < 1$.

I.B-2) • $\|A\| = \|PTP^{-1}\| = N(Q^{-1}PTP^{-1}Q) = N(\Delta^{-1}T\Delta) = N(\hat{T}) < 1$.

• $\|A\| < 1$ et $\|.\|$ est sous-multiplicative dans $M_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, donc $\sum\limits_{n} A^n$ est absolument convergente, ce qui entraine la convergence de $(A^m)_m$ vers 0.

II. Chemins dans les matrices positives

Dans cette partie, A désigne une matrice positive de $M_n(\mathbb{R})$.

II.A- Réduction d'un chemin à un chemin élémentaire

• Soit $i \ne j$ et soit $i = i_0 \longrightarrow i_1 \longrightarrow ... \longrightarrow i_m = j$ un chemin dans A.
- Si ce chemin est élémentaire, c'est fini.
- Si non, il existe $1 \le p < q \le m$ tel que $i_p = i_q$, alors on considère le chemin
$i = i_0 \longrightarrow ... \longrightarrow i_p \longrightarrow i_{q+1} \longrightarrow i_m = j$ qui de longueur $< m$.
- Si ce chemin est élémentaire, c'est fini.
- Si non on répète le même procédé qui s'arrête par avoir un chemin élémentaire dans A de longueur $\le n-1$, puisque ces éléments appartiennent à $\{1, ..., n\}$ et sont distincts.

• Soit $i \in \{1, ..., n\}$ et soit $i = i_0 \longrightarrow ... \longrightarrow i_m = i$ un circuit dans A. On applique le premier point au chemin $i = i_0 \longrightarrow ... \longrightarrow i_{m-1}$.

II.B- Une caractérisation de l'existence d'un chemin de i à j

On va procéder par récurrence sur $m \ge 1$.
- Pour $m = 1$, par définition $i \longmapsto j$ est un chemin de longueur 1 si, et seulement si, $a_{i,j} > 0$.
- Supposons l'équivalence est aquise au rang m.

$\Rightarrow$ Si $i = i_0 \longrightarrow ... \longrightarrow i_m \longrightarrow i_{m+1} = j$ est un chemin dans A de longueur $m+1$, alors $i = i_0 \longrightarrow ... \longrightarrow i_m$ est un chemin dans A de longueur m, donc par hypothèse de récurrence $a^{(m)}_{i,i_m} > 0$, donc

$a_{i,j}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} \geq a_{i,i_m}^{(m)} a_{i_m,j}$, or $a_{i_m,j} > 0$ par définition du chemin, donc $a_{i,j}^{(m+1)} > 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $a_{i,j}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} > 0$, alors $\exists k \in [[1,n]]$ tel que $a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} > 0$, donc $a_{i,k}^{(m)} > 0$ et $a_{k,j} > 0$, ce qui entraine par hypothèse de récurrence l'existence d'un chemin dans A $i \longrightarrow ... \longrightarrow k$ de longueur m, donc $i \longrightarrow ... \longrightarrow k \longrightarrow j$ est un chemin dans A, de longueur $m+1$.

II.C- **Chemins dans une puissance de A**

$\Rightarrow$ Soit $i = i_0 \longrightarrow ... \longrightarrow i_l = j$ un chemin dans A^m de longueur l, alors pour $k \in [[0, l-1]]$ $a_{i_k,i_{k+1}}^{(m)} > 0$, ce qui entraine par $II - B$ l'existence d'un chemin dans A d'origine i_k et d'extrémité i_{k+1} de longueur m. En superposant ces chemins, on obtient un chemin dans A de i vers j de longueur ml.

$\Leftarrow$ Soit $i = i_0 \longrightarrow ... \longrightarrow i_{ml} = j$ un chemin dans A de longueur ml, alors pour tout $k \in [[0, l-1]]$, $i_{km} \longrightarrow ... \longrightarrow i_{(k+1)m}$ est un chemin dans A de longueur m, donc $a_{i_{km},i_{(k+1)m}}^{(m)} > 0$, ce qui assure que, $i = i_0 \longrightarrow i_m \longrightarrow i_{2m} \longrightarrow ... \longrightarrow i_{lm} = j$ est un chemin dans A^m de longueur l.

III. **Matrices primitives et indice de primitivité**

Dans toute la suite, matrice primitive signifie matrice carrée positive primitive.

III.A- **Chemins élémentaires dans une matrice primitive**

A étant une matrice primitive, donc $\exists m \geq 1$ tel que $A^m > 0$.

• Soit $i \neq j$,alors $a_{i,j}^{(m)} > 0$, ce qui entraine par $II - B$, puis par $II - A$ qu'il existe dans A un chemin élémentaire de i à j de longueur $l \leq n-1$.

• Soit $i \in [[1,n]]$, alors $a_{i,i}^{(m)} > 0$, donc comme précédement, il existe dans A un circuit élémentaire passant par i de longueur $l \leq n$.

III.B- **Puissances d'une matrice primitive**

III.B-1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = n \text{ ou } j = n \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & O & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Alors A est positive sans l'être strictement et A^2 est telle que $a_{i,j}^{(2)} = 1$ si $(i,j) \neq (n,n)$ et $a_{i,j}^{(2)} = 1$ si non, donc $A^2 > 0$.

III.B-2) Soit $i \in [[1,n]]$.

$[Bx]_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j$, or $x \neq 0$, donc $\exists k$ tel que $x_k > 0$ et par suite

$[Bx]_i \geq b_{i,k} x_k > 0$, ce qui assure que $Bx > 0$.

III.B-3) • Les colonnes de A ne sont pas nulles. En effet s'il existe j tel que $c_j = 0$, alors $Ae_j = 0$ où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Donc $A^m e_j = 0$, ce qui contredit $A^m > 0$.

• On a $A^m > 0$, et $\forall j$, $c_j = Ae_j$ n'est pas nul, donc d'après la question précédente, $A^{m+1} e_j = A^m A e_j > 0$, c'est à dire $A^{m+1} > 0$. (ces colonnes sont strictement positives). et par une récurrence évidente $\forall p \geq m$, $A^p > 0$.

III.B-4) Si A est primitive, $\exists m \geq 1$ tel que $A^m > 0$ et par la question précédente, on aura $\forall k \geq 1$, $A^{km} = (A^k)^m > 0$, donc A^k est primitive.

III.B-5) Si $\rho(A) = 0$, alors $Sp(A) = \{0\}$, donc A est nilpotente et par suite $A^n = 0$, ce qui est en contradiction avec la question $III - B - 4$ qui dit que A^p est primitive.

III.C- **La matrice de Weilandt**

III.C-1) • W_n^T est la matrice compagnon associée au polynôme $X^n - X - 1$, donc $\chi_{W_n} = \chi_{W_n^T} = X^n - X - 1$.

• $W_n^{n^2-2n+1} = (W_n^n)^{n-2}.W_n = (W_n + 1)^{n-2}.W_n = \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k W_n^{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} W_n^k$.

• $W_n^{n^2-2n+2} = W_n^{n^2-2n+1}.W_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} W_n^{k+1} = \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} W_n^k = \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} W_n^k + W_n^n = I_n + W_n + \sum_{k=2}^{n-1} C_{n-2}^{k-2} W_n^k$.

III.C-2) • Le plus court circuit dans W_n passant par 1 est, $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow ... \longrightarrow n \longrightarrow 1$ qui est de longueur n.

• Montrons que $\forall k \in [[1, n-1]]$, $[W_n^k]_{1,1} = 0$.

Supposons qu'il existe $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ tel que $[W_n^k]_{1,1} > 0$, alors d'après $II - B$, il existe un circuit dans W_n de longueur k passant par 1, ce qui contredit la minimalité de n comme longueur minimale des circuits dans W_n passant par 1.

On obtient donc $W_n^{n^2-2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} 0 = 0$, ce qui assure que $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive.

III.C-3) • Soit $i \neq j$.

Du cycle donné à la question $III - C - 2$, on obtient :

Si $i < j$, le chemin $i \longrightarrow i+1 \longrightarrow ... \longrightarrow j$ est dans W_n de longueur $j - i \leq n-1$.

Si $i > j$, le chemin $i \longrightarrow i+1 \longrightarrow ... \longrightarrow n \longrightarrow 1 \longrightarrow ... \longrightarrow j$ est dans W_n de longueur $n - (i - j) \leq n - 1$.

• On vient de montrer que $\forall i \neq j$ il existe un chemin dans W_n de i à j de longueur un certain $k \leq n-1$, donc d'après la question $II - B$, $[W_n^{(k)}]_{i,j} > 0$, donc

$$[W_n^{n^2-2n+2}]_{i,j} = [W_n]_{i,j} + \sum_{p=2}^{n-1} C_{n-2}^{p-2}[W_n^p]_{i,j} \geq C_{n-2}^{k-2}[W_n^k]_{i,j} > 0.$$

De plus pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $[W_n^{n^2-2n+2}]_{i,i} \geq [I_n]_{i,i} = 1$.

On conclut que $W_n^{n^2-2n+2} > 0$, donc W_n est primitive d'indice de primitivité $n^2 - 2n + 2$.

III.D- **Indice de primitivité maximum**

Dans toute cette sous-partie, A est une matrice primitive donnée dans $M_n(\mathbb{R})$.

III.D-1) • L'hypothèse $l = n$ entraine que tout circuit élémentaire dans A est de longueur n.

Soit $\mathcal{C} : i = i_0 \longrightarrow i_1 \longrightarrow ... \longrightarrow i_m = i$ un circuit de longueur m, la division euclidiènne de m par n donne l'existence de q, r tel que $m = nq + r$ avec $0 \leq r < n$.

- Montrons que $i_n = i$.

Déjà $i_0, ..., i_{n-1}$ sont distincts, car si non on aura un circuit dans A de longueur $< n$, ce qui contredit la minimalité de n.

Si $i_n \neq i$, alors $i_n = j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$, on aura donc un circuit dans A passant par j de longueur $< n$, ce qui contredit la minimalité de n.

Le même raisonnement aboutit à $i_n = i_{2n} = ... = i_{qn} = i$, alors $i = i_{qn} \longrightarrow i_{qn+1} \longrightarrow ... \longrightarrow i_m = i$ est un circuit dans A de longueur $r \in [[0, n-1]]$, donc par minimalité de n, $r = 0$ et par suite $m = qn$.

• On va montrer que $\forall i$, $[A^{kn+1}]_{i,i} = 0$.

Supposons qu'il existe i tel que $[A^{kn+1}]_{i,i} > 0$, alors d'après $II - B$, il existe dans A un circuit passant passant par i est de longueur $kn + 1$, ce qui contredit que cette longueur doit être un multiple de n.

On conclut que A^{kn+1} est de diagonale nulle.

• A étant une matrice primitive, donc d'après $III-B-3$, $A^{kn+1} > 0$ pour k assez grand, ce qui contredit que sa diagonale est nulle.

III.D-2) a) Montrons qu'il existe dans A un chemin d'origine i de longueur $n - l$ et d'extrémité $k \in \{1, 2, ..., l\}$.

• Cas où $i \in \{1, ..., l\}$.

On fait la division euclidiènne de $n - l$ par l, on a donc $n - l = ql + r$ avec $0 \leq r < l$.

Notos $\mathcal{C}$ le chemin $i \longrightarrow i+1 \longrightarrow ... \longrightarrow l \longrightarrow 1 \longrightarrow ... \longrightarrow i-1$ qui est de longueur l.

$\mathcal{C}'$ le chemin extrait de $\mathcal{C}$, de longueur r, $i \longrightarrow i+1 \longrightarrow ... \longrightarrow r$, alors en superposant successivement le chemin $\mathcal{C}$ $q-$ fois puis le chemin $\mathcal{C}'$, on obtient le chemin

$\mathcal{C} \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ qui est dans A et de longueur $n - l = ql + r$.

• Cas où $i \in \{l+1, ..., n\}$.

$n - l \leq n - 1$, donc d'après $III - A$, il existe dans A un chemin élémentaire $\mathcal{C}$ d'origine i et de longueur $n - l$, or tout chemin élémentaire inclu dans $[[l+1, n]]$ est de longueur $\leq n - l - 1$, donc $\mathcal{C}$ passe nécessairement par un élément $j \in \{1, ..., l\}$.

On a donc le chemin $\mathcal{C} : i \longrightarrow ... \longrightarrow j$, soit $p \leq n - l$ sa longueur. On applique le cas précédent à $j \in \{1, ..., l\}$, il existe dans A un chemin $\mathcal{C}'$ d'origine j et d'extrémité $k \in \{1, ..., l\}$ de longueur $n - l - p$.

On conclut que $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est un chemin dans A d'origine i et d'extrémité k de longueur $n-l-p+p = n - l$.

b) • Pour tout $p \in \{1, ..., l\}$, le circuit

$p \longrightarrow p+1 \longrightarrow ... \longrightarrow l \longrightarrow 1 \longrightarrow ... \longrightarrow p$ est dans A de longueur l, donc d'après $II - B$, $[A^l]_{p,p} > 0$, en particulier puisque $k \in \{1, ...?l\}$, $[A^l]_{k,k} > 0$.

- Si $k = j$, le chemin $k \longrightarrow k \longrightarrow ... \longrightarrow k$ est dans A^l de longueur $n - 1$. (k est répété $(n-1)$-fois).

- Si $k \neq j$, La question $III - B - 4$ assure que A^l est aussi primitive, donc d'après $III - A$, il existe dans A^l un chemin d'origine k et d'extrémité j, de longueur $n - 1$. $(n - 1 \leq n - 1.)$

c) D'après a), il existe dans A un chemin de i à k, $i \longrightarrow ... \longrightarrow k$, de longueur $n-l$, et d'après b), il existe dans A un chemin de k à j, $k \longrightarrow ... \longrightarrow j$ de longueur $l(n-1)$, donc le chemin $i \longrightarrow ... \longrightarrow k \longrightarrow ... \longrightarrow j$ est un chemin dans A de i à j de longueur $n-l+l(n-1) = n+l(n-2)$, donc d'après $\mathrm{II}-\mathrm{B}$, $[A^{n+l(n-2)}]_{i,j} > 0$ et ceci pour tout couple (i,j), ce qui assure que $A^{n+l(n-2)} > 0$.
Or $l \leq n-1$, donc $(n^2-2n+2)-(n+l(n-2)) \geq (n^2-2n+2)-(n+(n-1)(n-2)) = 0$, ceci montre que $n^2-2n+2 \geq n+l(n-2)$, ce qui entraine par $\mathrm{II}-\mathrm{B}-3$ que $A^{n^2-2n+2} > 0$.

IV. Étude des puissances d'une matrice primitive

Dans toute cette partie, on se donne une matrice primitive A de $M_n(\mathbb{R})$.

IV.A- Puissances de la matrice $B = A - rL$

IV.A-1) Il suffit de montrer que $y \in H^{\perp}$.
Soit $z \in H = \mathrm{Im}(A-rI_n)$, alors $\exists t \in \mathbb{R}^n$ tel que $z = (A-rI_n)t$, donc
$(y|z) = (y|At-rt) = (y|At)-(ry|t) = (y|At)-(A^Ty|t) = 0$, donc $y \in H^{\perp}$.

IV.A-2) • $L^2 = xy^Txy^T == x(y^Tx)y^T = (y^Tx)(xy^T) = 1xy^T = L$, donc L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$.
• $(A-rI_n)L = (A-rI_n)xy^T = 0y^T = 0$, donc $\mathrm{Im}(L) \subset \mathrm{Ker}(A-rI_n)$., de plus $(x|y) \neq 0$, donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$, ce qui assure que $L = xy^T \neq 0$ et par suite $1 \leq \dim(\mathrm{Im}(H)) \leq \dim(D) = 1$ d'où $\mathrm{Im}(L) = D$.
• $L(A-rI_n) = xy^T(A-rI_n) = x((A^T-rI_n)y))^T = x0 = 0$, donc $\mathrm{Im}(A-rI_n) = H \subset \mathrm{Ker}(L)$ avec égalité de dimensions, donc $\mathrm{Ker}(L) = H$.
On vient de montrer que L est la projection sur $\mathrm{Im}(L) = D$ parallélement à $\mathrm{Ker}(L) = H$.

IV.A-3) • $rg(L) = rg(xy^T) \leq \min(rg(x), rg(y) \leq 1$, de plus $L \neq 0$, donc $rg(L) = 1$.
• $x > 0$ et $y > 0$, donc pour tous i,j, $[L]_{i,j} = x_iy_j > 0$, ce qui assure que $L > 0$.
• $L^Ty = (xy^T)^Ty = yx^Ty = 1y = y$.

IV.A-4) • $AL = Axy^T = rxy^T = rL$.
• $LA = xy^TA = x\left(A^Ty\right)^T = x(ry^T) = rL$.
• Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.
- Pour $m = 1$, rien à montrer.
- Supposons que $(A-rL)^m = A^m - r^mL$ pour un certain m, alors $(A-rL)^{m+1} = (A-rL)^m(A-rL) = A^{m+1} - rA^mL - r^mLA + r^{m+1}L^2$, or $AL = LA = rL$, donc par récurrence $A^mL = r^mL$, de plus $r^mLA = r^{m+1}L$ et $r^{m+1}L^2 = r^{m+1}L$, donc $(A-rL)^{m+1} = A^{m+1} - r^{m+1}L$, ce qui achève la récurrence.

IV.B- La matrice $B = A - rL$ vérifie $\rho(B) < r$

Dans cette question, on pose $B = 1 - rL$ et on prend λ une valeur propre non nulle de B et z un vecteur propre associé.

IV.B-1) • Soit $\lambda \in Sp(B)$ non nulle, alors $z = \dfrac{1}{\lambda}Bz$, donc $Lz = \dfrac{1}{\lambda}LBz = \dfrac{1}{\lambda}(LA-rL)z = 0$.
• $\lambda z = Bz = Az - rLz = Az$.
• On vient de montrer que $\forall \lambda \in Sp(B)$ non nulle, $\lambda \in Sp(A)$, donc $\forall \lambda \in Sp(B) \setminus \{0\}$, $|\lambda| \leq \rho(A) = r$ et par passage au max, on aura $\rho(B) \leq r$.

IV.B-2) • On a $|\lambda||z| = |\lambda z| = |Az| \leq A|z|$, donc $t = A|z| - |\lambda||z| \geq 0$.
On va montrer que ce vecteur est nul.
Si ce vecteur est non nul, alors en considérant $m \geq 1$ tel que $A^m > 0$, on aura d'après $\mathrm{III}-\mathrm{B}-2)$, $A^mt = A(A^m|z|) - |\lambda|A^m|z| > 0$, or $z \neq 0$ comme vecteur propre, donc $A^m|z| > 0$, donc il existe $\varepsilon >$ tel que $A(A^m|z|) - |\lambda|A^m|z| > \varepsilon A^m|z|$, donc $A(A^m|z|) > (\varepsilon + |\lambda|)A^m|z|$, ce qui entraine par récurrence simple que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $A^p(A^m|z|) > (\varepsilon+|\lambda|)^pA^m|z|$.
On pose $C = \dfrac{1}{|\lambda|+\varepsilon}A$. On obtient $C^p(A^m|z|) > A^m|z|$, or $\rho(C) = \dfrac{|\lambda|}{\varepsilon+|\lambda|} < 1$, donc $C^p \longrightarrow 0$ et le passage à la limite dans l'inégalité $C^p(A^m|z|) > A^m|z|$ aboutit à l'absurdité $0 \geq A^m|z|$.
On vient de montrer que $|Az| = A|z|$, donc si on note $z = (z_1, ..., z_n)$, alors $\forall i$, $[|Az|]_i = |\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}z_j| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|z_j|$, c'est une égalité de l'inégalité triangulaire, alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall j, z_j = e^{i\theta}|z_j|$, donc $z = e^{i\theta}|z|$ et par suite $\lambda z = Az = e^{i\theta}A|z| = re^{i\theta}|z| = rz$ et $z \neq 0$, donc $\lambda = r$.
• $\lambda = r$, donc $z \in D = \mathrm{Vect}(x)$ et puisque $D = \mathrm{Im}(L)$, on aura $Lz = z$, mais $Lz = 0$, donc $z = 0$ ce qui contredit le fait que z est un vecteur propre.
On conclut donc que $\rho(B) < r$.

IV.B-3) $(A-rL)^m = B^m = r^m\left(\left(\frac{1}{r}A\right)^m - L\right)$, donc $\left(\frac{1}{r}B\right)^m = \left(\frac{1}{r}A\right)^m - L$, or $\rho(B) < r$, donc $\rho\left(\frac{1}{r}B\right) < 1$, ce qui entraine que $\lim \left(\frac{1}{r}B\right)^m = 0$, c'est à dire $\left(\frac{1}{r}A\right)^m \longrightarrow L$.

IV.C- Le rayon spectral de A est une valeur propre simple

V. Matrices carrées positives irréductibles

Dans toute la suite, matrice irréductible signifie matrice carrée positive irréductible.
Dans toute cette partie, A est une matrice positive donnée dans $M_n(\mathbb{R})$.

V.A- Premières propriétés des matrices irréductibles

V.A-1) A est irréductible si, et seulement si, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$, il existe dans A un chemin de i à j.

V.A-2) Dans cette question, on doit prendre $i \neq j$. (voir l'exemple de la question suivante).
Soit $i \neq j$, alors d'après la question $II - A$, il existe un chemin élémentaire de longueur $\leq n-1$.

V.A-3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$, le circuit $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow ... \longrightarrow n \longrightarrow 1$ montre qu'il existe toujours un chemin dans A de i à j pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$, donc A est irréductible.
$Ae_n = e_{n-1}$, $A^2e_n = e_{n-2}$, $A^{n-1}e_n = e_1$ et $A^n = I_n$, donc $A^m \in \{I_n, A, ..., A^{n-1}\}$, or les égalités précédentes montrent que les matrices $A, A^2, ..., A^{n-1}$ ne sont pas strictement positives, donc A^m n'est jamais strictement positive et par suite A n'est pas primitive.

V.A-4) Si A n'est pas irréductible, alors $\exists i, j$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}, a_{i,j}^{(m)} = 0$, donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $[(a_{i,j}^2)^{(m)}]_{i,j} = [a^{(2m)}]_{i,j} = 0$, c'est à dire A^2 n'est pas irréductible.
• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = I_2$.
A est irréductible. En effet $a_{1,2} = a_{2,1} = 1 > 0$ et $a_{1,1}^{(2)} = a_{2,2}^{(2)} = 1 > 0$, mais A^2 n'est pas irréductible.

V.A-5) Soit A une matrice irréductible et supposons que $\rho(A) = 0$, alors $Sp(A) = 0$, donc $\forall m \in \mathbb{N}^*, Sp(A^m) = \{0\}$ et par suite $Tr(A^m) = 0$ et puisque $A^m \geq 0$, on aura $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall i$, $a_{i,i}^{(m)} = 0$, ce qui contredit que A est irréductible.

V.B- Deux caractérisations de l'irréductibilité et une condition nécessaire

V.B-1) A irréductible $\Longrightarrow B > 0$:
Soit i, j tel qu'il existe $m \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $a_{i,j}^{(m)} > 0$, alors $[B]_{i,j} = a_{i,j} + a_{i,j}^{(2)} + ... + a_{i,j}^{(n-1)} \geq a_{i,j}^{(m)} > 0$, donc $B > 0$.
$B > 0 \Longrightarrow C > 0$:
Supposons que $B > 0$, alors $C = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k A^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} A^k = B > 0$.
$C > 0 \Longrightarrow A$ est irréductible :
Supposons que $C > 0$. Si A n'est pas irréductible, alors $\exists i, j \in \{1, ..., n\}$ tel que $\forall m$ $a_{i,j}^{(m)} = 0$, donc $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a_{i,j}^{(k)} = 0$, ceci contredit le fait que $C > 0$.

V.B-2) • Supposons que A est irréductible et qu'il existe j tel que $c_j(A) = Ae_j = 0$, alors $\forall m$, $A^m e_j = 0$, c'est à dire $\forall j$, $a_{i,j}^{(m)} = 0$, ce qui contredit que A est irréductible.
• C'est clair que A est irréductible si, et seulement si, A^T est irréductible, donc le résultats précédent s'applique pour les lignes.

V.C- Deux conditions suffisantes de primitivité

Dans cette question, A est une matrice irréductible donnée.

V.C-1) Soit $i, j \in \{1, ..., n\}$. A étant irréductible, donc $\exists m \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $a_{i,j}^{(m)} > 0$, d'où l'existence d'un chemin dans A, $i \longrightarrow ... \longrightarrow j$ de longueur m.
- Si $m = n-1$, alors $a_{i,j}^{(n-1)} > 0$.
- Si $m < n-1$, alors vu que $a_{j,j} > 0$ par hypothèse on aura en ajoutant au chemin précédent $n-1-m$ termes égaux à j, le chemin $i \longrightarrow ... \longrightarrow j \longrightarrow j \longrightarrow ... \longrightarrow j$ qui est dans A et de longueur $n-1$.
Donc $\forall i, j, a_{i,j}^{(n-1)} > 0$, c'est à dire $A^{n-1} > 0$.

V.C-2) • Soit $j,k \in \{1,...,n\}$, A étant irréductible, donc $\exists m_1, m_2 \in \{0,...,n-1\}$ tel que $a_{j,i}^{(m_1)} > 0$ et $a_{i,k}^{(m_2)} > 0$, ce qui assure l'existence des chemins $j \longrightarrow ... \longrightarrow i$ de longueur m_1 et $i \longrightarrow ... \longrightarrow k$ de longueur m_2, alors le chemin $j \longrightarrow ... \longrightarrow i \longrightarrow ... \longrightarrow k$ de longueur m_1+m_2 de j à k et passant par i.

• Considérons m le maximum des longueurs de chemins ainsi obtenus, alors m ne dépend pas de j,k et le fait que $a_{i,i} > 0$ nous permet de construire le chemin
$j \longrightarrow ... \longrightarrow i \longrightarrow i \longrightarrow ... \longrightarrow k$ qui est de longueur m où on a ajouté des i au milieu. Donc $a_{j,k}^{(m)} > 0$ ceci pour tous j,k, donc $A^m > 0$.

VI. Le coefficient d'imprimitivité

Soit $A = (a_{i,j})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, avec $A \geq 0$.

VI.A- Diagonales des puissances d'une matrice imprimitive

• Soit A une matrice imprimitive de coefficient $p \geq 2$. Pour tout m non multiple de p, montrons que $\forall i \in \{1,...,n\}$, $[A^m]_{i,i} = 0$.
- Si $\exists i$ tel que $[A^m]_{i,i} > 0$, alors $\mathrm{tr}(A^m) > 0$. Le spectre $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ est invariant par ω, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{\omega\lambda_1,..,\omega\lambda_n\}$, donc $\mathrm{Tr}(A^m) = \omega^m \mathrm{Tr}(A^m)$, donc $(1-\omega^m)\mathrm{Tr}(A^m) = 0$ et vu que $\mathrm{Tr}(A^m) > 0$, on aura $\omega^m = 1$, ce qui exige la contradiction, m est multiple de p.
On conclut donc que $\forall i$, $[A^m]_{i,i} = 0$.

• Si le résultats de $IV - B - 3$ tient encore avec A primitive, alors $\left(\frac{1}{r}A\right)^m \longrightarrow L$ et par continuité de la trace, $\frac{1}{r^m}\mathrm{Tr}(A^m) \longrightarrow \mathrm{Tr}(L) = 1$, or $\mathrm{Tr}(A^m) = 0$, ce qui aboutit à l'absurdité $0 = 1$

VI.B- Une matrice de Weilandt " modifiée "

VI.B-1) Les deux cycles dans Z_n, à savoir
$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow ... \longrightarrow n-1 \longrightarrow 1$ et $2 \longrightarrow 3 \longrightarrow ... \longrightarrow n-1 \longrightarrow n \longrightarrow 2$
assurent que $\forall i,j \in \{1,...,n\}$, il existe un chemin dans Z_n de i à j, donc Z_n est irréductible.

VI.B-2) • $\chi_{Z_n} = \det(XI_n - Z_n)$.
Avec les opérations élémentaires, $C_1 \longleftarrow C_1 - C_n$, puis $L_n \longleftarrow L_n + L_1$, on obtient

$$\chi_{Z_n} = \begin{vmatrix} X & -1 & & O \\ & X & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & -2 & & X \end{vmatrix}$$ c'est le polynôme caractéristique de la transposée de la matrice compagnon

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & 2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ donc $\chi_{Z_n} = X^n - 2X$.

• Ici $\rho(A) = 2^{1/n-1}$, les valeurs propres λ de Z_n tel que $|\lambda| = \rho(A)$ sont solutions de $\lambda^{n-1} = 2$, donc l'indice d'imprimitivité est $n-1$.

VI.B-3) • Par le théorème de Cayley-Hamilton , $Z_n^n = 2Z_n$, donc $Z_n^{n^2-2n+2} = (Z_n^n)^{n-2}.Z_n^2 = (2Z_n)^{n-2}.Z_n^2 = 2^{n-2}Z_n^n = 2^{n-1}Z_n$.

• L'égalité précédente assure que $Z_n^{n^2-2n+2}$ n'est pas strictement positive, donc d'après la conclusion de $III - D$, Z_n n'est pas primitive.

VI.C- Coefficient d'imprimitivité et polynôme caractéristique

Soit $A \geq 0$ dans $M_n(\mathbb{R})$ une matrice irréductible. On note r son rayon spectral.
Soit $p \geq 1$ le coefficient d'imprimitivité de A.
Soit $\chi_A(X) = X^n + c_{k_1}X^{n-k_1} + ... + c_{k_s}X^{n-k_s}$ son polynôme caractéristique, écrit suivant les puissances décroissantes et en ne laissant apparaître que les coefficients c_k non nuls.

VI.C-1) Soit $k \in \{k_1,...,k_s\}$, le spectre est invariant par ω, donc
$$c_k = (-1)^k \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_k} = (-1)^k \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} \omega\lambda_{i_1}...\omega\lambda_{i_k} = c_k\omega^k$$ d'où $(1-\omega^k)c_k = 0$
et vu que $c_k \neq 0$, on aura $\omega^k = 1$ et par suite p divise k.

VI.C-2) • Montrons que βr est racine de χ_A.
On pose pour $j \in \{1,...,s\}$, $k_j = m_j qp$, alors $(\beta r)^{n-m_j qp} = (\beta)^{n-m_j qp} r^{n-m_j qp} = \beta^n r^{n-m_j qp}$, donc $\chi_A(\beta r) = \beta^n \chi_A(r) = \beta^n 0 = 0$.
• $\beta r \in \mathrm{Sp}(A)$ et $|\beta r| = |r|$, donc $(\beta r)^p = r^p$, donc $\beta^p = 1 = e^{i2\pi/q}$, ce qui contredit que $q \geq 2$. On conclut donc que p est le pgcd des k_i, $i \in \{1,...,s\}$.

VI.D- **Coefficient d'imprimitivité et longueur des circuits**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice irréductible. Pour tout i de $[[1,n]]$, on note $L_i = \{m \in \mathbb{N}^*, a_{i,i}^{(m)} > 0\}$ l'ensemble (non vide) des longueurs des circuits de A qui passent par i, et on note d_i le pgcd des éléments de L_i.

VI.D-1) Soit $k \in \{0\} \cup L_j$.

• $a_{i,j}^{(r)} > 0$, $a_{j,j}^{(k)} > 0$ et $a_{j,i}^{(s)} > 0$, alors il existe dans A un circuit de longueur $r+k+s$ passant par i, donc $a_{i,i}^{(r+k+s)} > 0$, c'est à dire $r+k+s \in L_i$ et par suite d_i divise $r+k+s$.

• De même $a_{i,j}^{(r)} > 0$ et $a_{j,i}^{(s)} > 0$, alors il existe dans A un circuit de longueur $r+s$ et passant par i, donc $a_{i,i}^{(r+s)} > 0$, c'est à dire $r+s \in L_i$ et par suite d_i divise $r+s$.

On aura donc d_i divise $(r+k+s)-(r+s) = k$ et ceci $\forall k \in \{0\} \cup L_j$, donc d_i divise d_j et par symétrie d_j divise d_i, ce qui entraine $d_i = d_j$. Notons dans la suite d cette valeur commune.

VI.D-2) A est primitive, donc $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m > 0$, d'où d'après $III-B-3)$, $A^{m+1} > 0$, ceci entraine que $m, m+1 \in L_i$, c'est à dire d divise m et d divise $m+1$, donc d divise $m+1-m = 1$ et par suite $d = 1$.

VI.D-3) Si d n'est pas multiple de p, alors d'après $VI-A$, A^d est à diagonale nulle, donc $\forall i \in \{1,...,n\}, d \notin L_i$. De même $2d, 3d, ..., (p-1)d$ ne sont pas multiples de p, donc n'appartiennent pas à L_i pour tout i, et par suite le pgcd des éléments de L_i est $\geq pd \geq 2d$, ce qui contredit que d est le pgcd.

VI.D-4) 1 n'est pas multiple de p, donc d'après $VI-A$, la diagonale de A est nulle.

a) - Si $j \notin H$, $\sigma(j) = j$, donc $[xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = [xI_n - A]_{j,j} = x$, donc $\prod_{j \notin H} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = x^{n-h}$.

- Si $j \in H$, $\sigma(j) \neq j$, donc $[xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = -a_{j,\sigma(j)}$, donc $\prod_{j \in H} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = (-1)^h \prod_{j \in H} a_{j,\sigma(j)}$,

ce qui entraine que $\psi(\sigma) = \prod_{j \in H} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)} . \prod_{j \notin H} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = (-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in H} a_{j,\sigma(j)}$.

b) • $\psi(\sigma) = (-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in H} a_{j,\sigma(j)} \neq 0$, donc $\forall j \in H$, $a_{j,\sigma(j)} > 0$, donc

$j_1 \longrightarrow j_2 \longrightarrow ... \longrightarrow j_m \longrightarrow j_1$ est un circuit dans A.

• On vient de montrer qu'il existe dans A un circuit de longueur m, donc $m \in L_{j_1}$, ce qui entraine que d divise m.

• Soit $\sigma = c_1 ... c_p$ la décomposition en cycles disjoints où c_i de longueur $m_i \geq 2$ élément de H.

- On vient de montrer que d divise m_i, or $h = \sum_{i=1}^{p} m_i$, donc d divise h.

c) • $\chi_A(x) = \sum_{\sigma / \psi(\sigma) \neq 0} \varepsilon(\sigma)(-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in H} a_{j,\sigma(j)}$. Du fait que d divise h le polynôme s'écrit de la manière proposée où les α_i peuvent être nulles.

D'après la question $VI-C$, p est le pgcd des qd, donc p est multiple de d.

• On conclut que le coefficient d'imprimitivité d'une matrice irréductible est le pgcd de l'ensemble des longueurs des circuits de A. C'est le théorème de Romanovsky.