Problème

Dans tout le problème K est un sous-corps du corps des réels $\mathbb{R}$. Par définition, un réel α est *algébrique* sur le corps K si et seulement si le réel α est racine d'un polynôme *non nul* de $K[X]$. Dans le cas contraire, le réel α est *transcendant* sur le corps K.

Soient K un sous-corps de $\mathbb{R}$ et α un réel algébrique sur le corps K ; désignons par $\mathcal{I}(\alpha)$ l'ensemble des polynômes P appartenant à $K[X]$ qui admettent α comme racine :

$$\mathcal{I}(\alpha) = \{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{I}(\alpha)$ est un idéal de $K[X]$.
   En déduire l'existence d'un polynôme $M_\alpha \in K[X]$ unitaire unique tel que : $\mathcal{I}(\alpha) = M_\alpha K[X]$.
2. Soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire et irréductible dans $K[X]$. Démontrer que P est égal à M_α si et seulement si le réel α est racine du polynôme P.

Par définition le polynôme M_α est le *polynôme minimal* de α sur K. Le degré du polynôme M_α, noté $d(\alpha, K)$, est alors appelé le *degré* de α sur K. Soit $K[\alpha]$ le K-espace vectoriel :

$$K[\alpha] = \mathrm{Vect}_K\left(\left\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{P(\alpha) \mid P \in K[X]\}.$$

Il est admis que l'ensemble $K[\alpha]$ est, pour les lois de composition somme et produit, un anneau.

3. Le réel α et le corps K étant donnés, démontrer l'équivalence entre les affirmations suivantes :
   (i) le réel α appartient à K ;
   (ii) le degré de α sur K est égal à 1 ;
   (iii) l'anneau $K[\alpha]$ est égal à K.

Dans les questions 4 et 5 le degré de α sur K est égal à 2.

4. Préciser la dimension de $K[\alpha]$ et en donner une K-base. Démontrer que $K[\alpha]$ est un corps.
5. Démontrer qu'il existe $d \in K \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que : $K[\alpha] = K[\sqrt{d}]$.

Par définition, dans le cas $d(\alpha, K) = 2$, on dit que $K[\alpha]$ est une *extension quadratique* de K.

Dans les questions 6 à 9 le degré de α sur K est égal à un entier $\boldsymbol{n \geqslant 2}$:

6. Démontrer que pour tout $x \in K[\alpha]$, il existe un unique un polynôme $R \in K[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que : $x = R(\alpha)$. En déduire une K-base de $K[\alpha]$ et sa dimension.
7. Démontrer que, pour tout $x \in K[\alpha]$ non nul, le polynôme R de la question précédente est premier avec M_α. En déduire l'existence de $U \in K[X]$ tel que : $U(\alpha)R(\alpha) = 1$.
8. Démontrer que l'anneau $K[\alpha]$ est un corps.
9. Démontrer que $K[\alpha]$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $K \cup \{\alpha\}$.

On suppose à présent : $K = \mathbb{Q}$. Considérons la suite des polynômes réels définis par :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 2X + 1, \quad \text{et :} \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit Q_n le polynôme défini par la relation : $Q_n = P_n\left(\frac{X}{2}\right)$.

Propriétés générales des polynômes P_n.

10. Déterminer les polynômes : P_2, P_3, P_4.
11. Déterminer le degré du polynôme P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$; préciser le coefficient du terme de plus haut degré et le terme constant.
12. Démontrer que les coefficients des polynômes Q_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont des entiers relatifs.
13. Démontrer que les seules racines rationnelles possibles de Q_n sont les entiers 1 et -1.
14. Exprimer $Q_{n+3} + XQ_n$ en fonction de Q_{n+1}. En déduire que les racines rationnelles éventuelles des polynômes Q_{n+3} et Q_n sont les mêmes. Préciser les polynômes P_n qui ont une racine rationnelle.

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la donnée de u_0 et de u_1 et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1}\cos(\theta) - u_n.$$

Racines du polynôme P_n.

15. Déterminer l'expression du terme général u_n de la suite ci-dessus en fonction de n, θ et de deux scalaires λ et μ déterminés par θ, u_0 et u_1.
16. *Utiliser la question précédente* pour démontrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

    En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines du polynôme P_n. On les notera $x_{k,n}$ avec $k \in [\![1, n]\!]$.
17. Démontrer que les trois nombres réels $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. Déterminer leur polynôme minimal.

Dans les questions 18 à 20, on pose : $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$, qui est algébrique sur $\mathbb{Q}$ par ce qui précède.

18. Démontrer que la dimension de $\mathbb{Q}[\alpha]$ est 3 et qu'une $\mathbb{Q}$-base est $\mathcal{B} = (1, \alpha, \alpha^2)$.
    Donner l'expression dans cette base des réels $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ et $\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$.
19. Soit f un endomorphisme non nul du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\alpha]$, tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}[\alpha]^2, \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

    Déterminer les différentes valeurs possibles de $f(1)$ et $f(\alpha)$, exprimés dans la base $\mathcal{B}$.
20. En déduire que l'ensemble de ces endomorphismes est, pour la loi de composition des endomorphismes, un groupe à trois éléments f_1, f_2, f_3. Déterminer les matrices associées à ces endomorphismes f_1, f_2, f_3 dans la base $\mathcal{B}$.

Fin