Puissances d'un endomorphisme géométrique

Dans tout le problème, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle et rapporté à sa base canonique (orthonormée directe) notée (e_1,e_2,e_3).

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la $\mathbb{R}$ algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité.

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $S=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -1 & 5 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Calculer $\det s$. En déduire que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $e_1'=(1,1,1)$, $e_2'=(1,-1,0)$ et $e_3'=(1,1,-2)$.

2.a Montrer que (e_1',e_2',e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.b Déterminer la matrice S' de s dans la base (e_1',e_2',e_3').

2.c Calculer S'^n et donner une méthode de calcul de S^n.
(on ne demande pas d'effectuer lesdits calculs).

3.a La famille (I_3,S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

3.b Montrer que S^2 peut s'exprimer comme combinaison linéaire de I_3 et S.

3.c En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n,b_n) de réels tels que $S^n=a_nI_3+b_nS$.

3.d Donner les valeurs de a_0,b_0,a_1,b_1 et exprimer, pour $n\in\mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3.e Montrer que la suite $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

3.f En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4. Soit $B=S-2I_3$.

4.a Calculer B^n pour $n\in\mathbb{N}$.

4.b En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n\in\mathbb{N}$.

4.c Comparer avec le résultat de la question 3.

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 5\\ 5 & -1 & -1\\ -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On pose $u=f\circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1. Calculer U ; vérifier que u est une rotation vectorielle et que $u\circ s=s\circ u=f$.

2. Soit (e_1'',e_2'',e_3'') la famille obtenue en normant les vecteurs e_1',e_2' et e_3' de la question I.2.

2.a Montrer que (e_1'',e_2'',e_3'') est base orthonormée directe.

2.b Ecrire la matrice U' de u dans cette base et caractériser géométriquement u.

3.a Exprimer la matrice de s dans la base (e_1'',e_2'',e_3'') en fonction de S'.

3.b En déduire la matrice de f dans la base (e_1'',e_2'',e_3'').

4.a Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?

4.b Soit $P=\mathrm{Vect}(e_2'',e_3'')$.

4.b.i Montrer que $f(P)=P$.

4.b.ii Soit g l'endomorphisme de P tel que pour tout x de P, $g(x)=f(x)$. Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on reconnaîtra.