

Extrait

Problème 2

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans \mathbb{N} , lorsqu'elle existe, la fonction G_X définie par: $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$.

Partie I

Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Montrer que la fonction génératrice G_X est au moins définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_X^{(k)}(0) = k!P(X = k)$.
3. Donner l'expression de G_X , en précisant le domaine de définition, dans chaque cas suivant:
 - a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$.
 - b) X suit la loi binomiale de paramètre n, p , notée $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$.
 - c) X suit la loi géométrique de paramètre p , notée $G(p)$, où $p \in]0, 1[$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $G_X'(1) = E(X)$.
5. Montrer que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.
6. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $G(p)$ de paramètre p , où $p \in]0, 1[$.

Partie II

La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket = \{1, \dots, n\}$. On suppose que pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X , telle que $X(\Omega) = \llbracket 1, m \rrbracket$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$, (en particulier, sachant que l'événement $(N = h)$ est réalisé, $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $S = \sum_{i=1}^h X_i$).

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $G_{X_1 + \dots + X_k} = G_X^k$.
2.
 - a) Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend un nombre fini de valeurs dans $Y(\Omega)$, montrer que $E(Y) = \sum_{k=1}^n P(N = k)E(Y|[N = k])$, où $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(Y|[N = k]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P((Y = y)|[N = k])$ désigne l'espérance de Y sachant l'événement $[N = k]$ et $P((Y = y)|[N = k])$ désigne la probabilité de $(Y = y)$ sachant l'événement $[N = k]$.
 - b) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout réel t , $E(t^S|[N = k]) = G_X^k(t)$.
 - c) En déduire que pour tout réel t , $G_S(t) = \sum_{k=1}^n P(N = k)G_X^k(t)$.
 - d) Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
3. En déduire que $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III

Application

On dispose d'un jeton non truqué à deux faces numérotées 1 et 2 et d'un dé tétraédrique (famille des pyramides composés de quatre faces triangulaires), équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On lance le jeton et on note N le numéro obtenu, puis on lance N fois le dé et pour chaque lancer, on note le numéro de la face d'appui du dé. Soit S la somme des numéros obtenus lors de ces N lancers, (si $N = 1$, le dé est lancé une seule fois et S est le numéro lu sur la face d'appui du dé).

1.
 - a) Déterminer la loi de N .
 - b) Donner la loi conditionnelle de S sachant $[N = k]$, pour $k = 1$, puis pour $k = 2$.
 - c) En déduire la loi de S , puis son espérance et sa variance.
2.
 - a) Identifier la variable aléatoire X telle que $S = \sum_{i=1}^N X_i$, où X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X .
 - b) Déterminer les fonctions génératrices G_N et G_X et en déduire la fonction génératrice G_S .
 - c) Retrouver, en utilisant la fonction génératrice G_S , la loi, l'espérance et la variance de S .

Fin extrait