

Traitez les exercices marqués  
en **jaune**. La solution est en bas.

Traitez les exercices marqués  
en **jaune**. La solution est en bas.

## EXERCICES

MPSI

### INTÉGRALES IMPROPRES

#### Exercice 1 :

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

a)  $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$

c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$

d)  $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$

e)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$

f)  $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

g)  $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

h)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$

i)  $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$

#### Exercice 2 :

Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  est convergente mais pas absolument.

#### Exercice 3 :

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f$  et  $f''$  sont de carrés intégrables.

a) Montrer que  $f'$  est de carré intégrable.

b) Montrer :

$$\left( \int_{\mathbb{R}} f'^2 \right)^2 \leq \left( \int_{\mathbb{R}} f^2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} f''^2 \right)$$

#### Exercice 4 :

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels  $a$  et  $b$  pour que les intégrales suivantes existent :

a)  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b}$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt$

c)  $\int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-t}}{1+t^b} dt$

2) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha \in \mathbb{R}$  pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$$

**Exercice 5 :** (Intégrales de Bertrand)

Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on étudiera les intégrales de Bertrand suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$$

1) Montrer que

$$\forall \alpha \succ 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \text{ converge}$$

2) Montrer que

$$\forall \alpha \prec 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \text{ diverge}$$

3) Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \beta \succ 1$$

**Exercice 6 :**

Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$

c)  $\int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

e)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$

d)  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$

**Exercice 7 :**

a) Justifier l'existence de

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$$

b) Établir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$$

c) En séparant cette dernière intégrale en deux, observer

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

puis donner la valeur de  $I$ .

**Exercice 8 :**

- a) Justifier l'existence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$$

Pour  $x > 0$ , on pose

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$$

- b) On rappelle
- $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$
- . Établir que

$$I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

- c) En déduire la valeur de
- $I$
- .

**Exercice 9 :**

- a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

En déduire

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1 + t^2}$$

- b) Soit
- $n \in \mathbb{N}^*$
- . Établir l'existence des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$$

puis établir

$$I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$$

- c) On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

Établir

$$I_n = W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1} = W_{2n}$$

- d) Trouver une relation de récurrence entre
- $W_n$
- et
- $W_{n+2}$
- .
- 
- En déduire la constance de la suite de terme général

$$u_n = (n + 1)W_n W_{n+1}$$

- e) Donner un équivalent de
- $W_n$
- et en déduire la valeur de
- $I$
- .

### Exercice 1 :

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

a)  $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

C'est étudier si l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$  converge ou pas.

D'abord la fonction  $t \mapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$  est CPM sur  $]0,1[$ .

Autour de 0 :

Étudions la convergence de  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ .

$$\text{On a } \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \left( (1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \text{ car } \lim_{t \rightarrow 0} (1-t) = 1 \neq 0 \right)$$

Alors  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$  et  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$  sont de même nature.

Or  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$  converge car c'est une intégrale de Riemann ( $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ )

Donc  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$  converge.  $\square$

Autour de 1 :

Étudions la convergence de  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ .

$$\text{On a } \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-t} \quad \left( \sqrt{t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1 \text{ car } \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t} = 1 \neq 0 \right)$$

Alors  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$  et  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-t} dt$  sont de même nature.



Soient  $a < b \in \mathbb{R}$ . On a :

i)  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$  converge  $\Leftrightarrow \alpha < 1$

ii)  $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$  converge  $\Leftrightarrow \alpha < 1$

On  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)} dt$  diverge, comme intégrale de Riemann ( $\alpha = 1 \not< 1$ )

Donc  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$  diverge.  $\square$

Enfin,  $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$  diverge.

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$

La fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$  est CPM sur  $]0, +\infty[$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \left( \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1} dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt \text{ convergent} \right)$$

1) Au voisinage de  $+\infty$

$$\text{On a } \frac{\ln t}{t^2+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^2}$$

Alors  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$  sont de même nature.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 (\ln t)^{-2}} dt.$$

Soit  $1 < \alpha < 2$ .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot \frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2-2} \cdot \ln t$$

$$= 0$$

(par croissance comparée au voisin de  $+\infty$ , et vu que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2-2} = 0$ )

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)_{t \rightarrow +\infty}$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge (Riemann, avec  $\alpha > 1$ )

Donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$  converge.

Par suite  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$  converge

2) Au voisinage de 0

$$\text{On a } \frac{\ln t}{t^2+1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$$

Donc  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1} dt$  et  $\int_0^1 \ln t dt$  sont de même nature.

Or  $\int_0^1 \ln t dt$  converge (du Cours)

Alors  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1} dt$  converge

Enfin

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt \text{ converge}$$



$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$$

La fonction  $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$  est CPM sur  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ .

Or Cette fonction est **paire**, alors pour montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$

Converge, il suffit de montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$  converge.

La fonction  $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$  étant CPM sur  $[0, +\infty[$ , alors on étudiera juste au voisinage de  $+\infty$ .

$$\text{On a } (1+t^2) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^2$$

Et on a aussi  $\ln(1+t^2) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(t^2)$  car :

$$\frac{\ln(1+t^2)}{\ln(t^2)} = \frac{\ln(t^2(\frac{1}{t^2} + 1))}{\ln(t^2)} = 1 + \frac{\ln(\frac{1}{t^2} + 1)}{\ln(t^2)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{D'où } \ln(1+t^2) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln t$$

Par suite  $\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln t}{t^2}$

D'où  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{2 \ln t}{t^2} dt$  sont de même nature.

Pour la 2<sup>ème</sup>, on pense à la technique de Bertrand.

On a  $\frac{\ln t}{t^2} = \frac{1}{t^2 (\ln t)^{-1}}$

Soit  $1 < \alpha < 2$ .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \cdot \frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha-2} \cdot \ln t$$

$$= 0$$

(par croissance comparée au voisin de  $+\infty$ , et vu que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha-2} = 0$ )

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln t}{t^2}}{\frac{1}{t^\alpha}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)_{t \rightarrow +\infty}$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge (Riemann, avec  $\alpha > 1$ )

D'où  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$  converge.

Par suite  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$  converge.

$$d) \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

La fonction  $t \mapsto \ln(t) \cdot e^{-t}$  est CPM sur  $]0, +\infty[$ .

1) Au voisinage de 0

$$\ln(t) \cdot e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t) \quad \left( \text{car } e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \right)$$

Or  $\int_0^1 \ln(t) dt$  converge (dr. cons)

Alors  $\int_0^1 \ln(t) \cdot e^{-t} dt$  converge

2) Au voisinage de  $+\infty$

Par croissance comparée,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot (\ln(t) \cdot e^{-t}) = 0$

$$\text{D'où } \ln(t) \cdot e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)_{t \rightarrow +\infty}$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge

Alors  $\int_1^{+\infty} \ln(t) \cdot e^{-t} dt$  converge.

Enfin

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) \cdot e^{-t} dt \text{ converge.}$$



$$e) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$$

La fonction  $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$  est CPM sur  $]0, +\infty[$ .

1) Au voisinage de 0

$$\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t^{3/2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}} \quad \left( \text{car } \ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \right)$$

Donc  $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$  et  $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt$  sont de même nature.

Or  $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt$  converge (Riemann :  $\frac{1}{2} < 1$ )

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt \text{ converge.}$$

2) Au voisinage de  $+\infty$

$$\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^{3/2}}, \quad \text{car } \ln(1+t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln t \text{ puisque :}$$

$$\frac{\ln(1+t)}{\ln t} = \frac{\ln(t(1+\frac{1}{t}))}{\ln t} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{\ln t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}} dt$  sont de même nature.

Soit  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ .

$$\lim_{+\infty} t^\alpha \cdot \frac{\ln t}{t^{3/2}} = \lim_{+\infty} t^{\alpha - \frac{3}{2}} \cdot \ln t$$

$$= 0$$

(car  $\alpha - \frac{3}{2} < 0$  et par)  
Croissance comparée)

D'où  $\frac{\ln t}{t^{3/2}} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge (Riemann :  $\alpha > 1$ )

Alors  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}} dt$  converge

Par suite  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$  converge.

Enfin  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$  converge.

f)  $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

La fonction  $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$  est CPM sur  $]0, +\infty[$ .

Av voisinage de  $+\infty$  :

Étudions la convergence de  $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ .

On a  $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$  (car  $\frac{1}{t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ )

D'où  $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  sont de même nature.

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge, comme intégrale de Riemann ( $\alpha = 2 > 1$ )

D'où  $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$  converge.  $\square$

Av voisinage de 0 :

Étudions la convergence de  $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ .

En 0:  $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

On a:  $\forall t \in ]0, 1], \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \leq 1$

Or  $\int_0^1 1 dt$  cr  $\Rightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

$\rightarrow$  n'est pas positif



On a :  $\forall t \in ]0, 1], |\sin(\frac{1}{t^2})| \leq 1$

Or  $\int_0^1 1 dt$  converge

Alors  $\int_0^1 |\sin(\frac{1}{t^2})| dt$  converge

Par suite  $\int_0^1 \sin(\frac{1}{t^2}) dt$  converge (car ACV  $\Rightarrow$  CV) □

En fin,  $\int_0^{+\infty} \sin(\frac{1}{t^2}) dt$  converge

Exercice Cousin :

Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \sin(\frac{1}{n^2})$  ?

Réponse

On a  $\sin(\frac{1}{n^2}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

Alors les séries  $\sum_{n \geq 1} \sin(\frac{1}{n^2})$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  sont de même nature.

Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge, comme série de Riemann ( $d=2 > 1$ )

Donc  $\sum_{n \geq 1} \sin(\frac{1}{n^2})$  converge □

$$g) \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$$

La fonction  $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$  est CPM sur  $[0, +\infty[$ .

À u voisinage de  $+\infty$

$$\text{On a } (1+t^2) \underset{+\infty}{\sim} t^2$$

$$\text{Alors } \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$$

D'où  $\int_1^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt$  sont de même nature.

On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} = 0$  par Croissance Comparée.

$$\text{D'où } \lim_{+\infty} \frac{\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}}{\frac{1}{t^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} \underset{+\infty}{=} 0 \left( \frac{1}{t^2} \right)$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge (Riemann;  $2 > 1$ )

D'où  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt$  converge.

Par suite  $\int_1^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$  converge.

Enfin

$$\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt \text{ converge.}$$

h)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$  nature ?

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$  est CPM sur  $]0, +\infty[$ .

Au voisinage de 0 ?

On a  $(e^t - 1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$  alors  $\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$

On  $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$  diverge, comme intégrale de Riemann ( $\alpha = 1 > 1$ )

D'où  $\int_0^1 \frac{1}{e^t - 1} dt$  diverge.

Enfin  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1} dt$  diverge.

$$i) \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$$

La fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}$  est CPM sur  $]0, 1[$ .

1) Au voisinage de 0

$$\sqrt{(1-t)^3} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \Rightarrow \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$$

Or  $\int_0^{1/2} \ln t \, dt$  converge (du cours)

Alors  $\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \, dt$  converge.

2) Au voisinage de 1

On a  $\ln t \underset{t \rightarrow 1}{\sim} (t-1)$  (équivalent usuel)

$$\text{Alors } \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{(t-1)}{\sqrt{(1-t)^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} - \frac{(1-t)}{(1-t)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} - \frac{1}{(1-t)^{1/2}}$$

$$\text{Or } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} dt \text{ Converge}$$

$$\text{Alors } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt \text{ Converge.}$$

$$\text{Enfin, } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt \text{ et } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt \text{ Convergent.}$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt \text{ Converge.}$$



## Exercice (très classique)

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\alpha > 1$ .

Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes (et donc convergentes):

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$$

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$$

## Solution

La fonction  $t \mapsto \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha}$  est CPM sur  $[1, +\infty[$ .

$$\forall t \in [1, +\infty[, \left| \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge comme intégrale de Riemann ( $\alpha > 1$ )

Alors  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} \right| dt$  converge.

Càd  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$  est ACV.

## Exercice (très classique)

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\alpha > 1$ .

Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes  
(et donc convergentes) :

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}$$

$$2) \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\lambda n)}{n^\alpha}$$

$$3) \sum_{n \geq 1} \frac{e^{i\lambda n}}{n^\alpha}$$

## Solution

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha} \text{ ACV ?}$$

$$\text{On a : } \forall n \geq 1, \left| \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\text{Or la série } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV (Riemann : } \alpha > 1)$$

$$\text{Donc la série } \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha} \right| \text{ converge}$$

$$\text{Càd } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha} \text{ est ACV.}$$

### Exercice 2 :

Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  est convergente mais pas absolument.

#### Solution

1) M. que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.

2) d'abord la fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est CPM sur  $]0, +\infty[$ .

a) Au voisinage de  $+\infty$

M. que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.

On fait via l'intégration par parties.

$$\text{On a } \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^{+\infty} (-\cos t)' \times \frac{1}{t} dt$$

et les fonctions  $t \mapsto -\cos t$  et  $t \mapsto \frac{1}{t}$  sont de classe  $C^1$  sur  $[1, +\infty[$ .

On a que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\cos t) \times \frac{1}{t}$  existe car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\cos t) \times \frac{1}{t} = 0$ .

D'où les deux intégrales impropres  $\int_1^{+\infty} (-\cos t)' \times \frac{1}{t}$ , qui est  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

et  $\int_1^{+\infty} (-\cos t) \times \left(\frac{1}{t}\right)' dt$  sont de même nature.

Càd  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$  sont de même nature.

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$  converge car ACV, on fait que :

$(\forall t \in [1, +\infty[, |\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2})$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  CV (Riemann : 271)



2) On  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge.  $\square$

b) Au voisinage de 0

On que  $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \in \mathbb{R}$$

2) On  $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.  $\square$

Enfin  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.

1) On que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  n'est pas ACV

C'est à dire  $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$  diverge.

On a  $\int_0^1 \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$  converge (car  $\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\sin t}{t} \right| = 1$ )

Alors on montre que  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$  diverge.



Clé

$$\text{On a : } (\forall t \in [1, +\infty[ , |\sin t|^2 \leq |\sin t|)$$

$$\Rightarrow \forall t \in [1, +\infty[ , \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t}$$

$$\text{Or } \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} , \text{ par linéarisation on } \cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t .$$

$$\text{Alors } \left( \forall t \in [1, +\infty[ , \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{1 - \cos(2t)}{2t} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \forall t \in [1, +\infty[ , \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{1}{2t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2t)}{t} \right)$$

$$\text{On a } \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} dt \text{ diverge (Riemann : } \alpha = 1 < 1)$$

$$\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt \text{ converge (via une IPP, comme fait plus haut)}$$

$$\text{Alors } \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{2t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2t)}{t} \right) dt \text{ diverge}$$

$$\text{Par suite } \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \text{ diverge.}$$

$$\text{Enfin } \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \text{ diverge.}$$



#### Exercice 4 :

- 1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels  $a$  et  $b$  pour que les intégrales suivantes existent :

a)  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b}$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt$

c)  $\int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-t}}{1+t^b} dt$

1) a) Pour  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt$  :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^2 \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt \text{ converge} \\ \text{et} \\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt \text{ converge} \end{cases}$$

i) Au voisinage de 1

$$\frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^b} \quad \text{car } t^a \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1 \quad \left( \lim_{t \rightarrow 1} t^a = 1 \text{ par exemple} \right)$$

D'où :

$$\int_1^2 \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{1}{(t-1)^b} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow b < 1 \text{ (Riemann)}$$

ii) Au voisinage de  $+\infty$

$$\frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^a \cdot t^b} \sim \frac{1}{t^{a+b}} \quad \text{car } (t-1)^b \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^b$$

Dm :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a (t-1)^b} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{a+b}} dt \text{ converge}$$
$$\Leftrightarrow a+b > 1 \text{ (Riemann)}$$

Enfin :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a (t-1)^b} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b > 1 \\ \text{et} \\ b < 1 \end{cases}$$



2) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha \in \mathbb{R}$  pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$$

Est  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ existe} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge et } \int_1^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge}$$

1) Au voisinage de 0

$$\text{On a } \frac{t - \sin t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} ?$$

$$\text{On a } \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \Rightarrow (t - \sin t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3}{6}$$

$$\text{Donc } \frac{t - \sin t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3}{6t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-3}}$$

$$\text{Alors } \int_0^1 \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-3}} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 3 < 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha < 4$$

2) Au voisinage de  $+\infty$

$$\text{On a } \frac{t - \sin t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ?$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow ?$$

$$\text{On a } (t - \sin t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t \quad \text{car } \begin{cases} t \rightarrow +\infty \\ \sin t \text{ borné} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{t - \sin t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

$$\text{Alors } \int_1^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 2$$

Enfin :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ existe} \Leftrightarrow \alpha < 4 \text{ et } \alpha > 2$$

Cacl :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ existe} \Leftrightarrow 2 < \alpha < 4$$



**Exercice 5 :** (Intégrales de Bertrand)

Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on étudiera les intégrales de Bertrand suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$$

1) Montrer que

$$\forall \alpha > 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \text{ converge}$$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha'} (\ln t)^\beta}$  est continue sur  $[2, +\infty[$ .

Soit  $1 < \alpha' < \alpha$ .

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha'} \cdot \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha' - \alpha} \cdot \frac{1}{(\ln t)^\beta}$$

$= 0$  car  $\alpha' - \alpha < 0$  et par croissance comparée.

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}}{\frac{1}{t^{\alpha'}}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = o\left(\frac{1}{t^{\alpha'}}\right)_{+\infty}$$

Or  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha'}} dt$  converge, car  $\alpha' > 1$

Alors  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$  converge



2) Montrer que

$$\forall \alpha < 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \text{ diverge}$$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$  est continue sur  $[2, +\infty[$ .

Soit  $\alpha < \alpha' < 1$ .

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha'} \cdot \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha' - \alpha} \cdot \frac{1}{(\ln t)^\beta}$$

$= +\infty$  car  $\alpha' - \alpha > 0$  et par croissance comparée.

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}}{\frac{1}{t^{\alpha'}}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t^{\alpha'}}}{\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^{\alpha'}} \underset{+\infty}{=} 0 \left( \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \right)$$

$$\text{Or } \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha'}} dt \text{ diverge (car } \alpha' < 1)$$



Alors  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 (\ln t)^\beta} dt$  diverge. 

3) Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1$$

Rédaction à venir !

## Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$

c)  $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

e)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$

d)  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$

## SOLUTION

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$\frac{1}{(t+1)(t+2)}$  donne :

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+2} dt$$

Interdit

interdit ⚠, car les deux intégrales divergent.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^x \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln(t+1) - \ln(t+2) \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left( \frac{t+1}{t+2} \right) \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\ln \left( \frac{x+1}{x+2} \right)}_{\rightarrow 0} - \ln \left( \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt = \ln 2$$



Exercice similaire pour les séries numériques

Calculer la somme de la série numérique  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$