Thème: Nombres réels - Suites réelles.

Problème :

Partie I :

1) Soient $n,k \in \mathbb{N}$ *tels que* $k \leq n$. Justifier que $C_n^k \leq n^k$.

2) En déduire que : $\forall n \geq 1, \forall \alpha \in [0,1[, 1 \leq \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1-\alpha}$.

(Vous pouvez utiliser le binôme de Newton)

3) Déduire de 2) que :

$$\forall n \geq 1\,,\ \forall \varepsilon \succ 0\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ on\ a : \left(0 \leq x \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) \Rightarrow \left(1 \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq 1+\varepsilon\right)$$

4) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

On se propose de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\alpha_n)^n = 1$.

a) *Via la définition* :

Soit $\varepsilon \succ 0$.

a)1) Justifier l'existence d'un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0\,, 0 \leq n\alpha_n \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

a)2)Déduire de 3) que : $\forall\, n \geq n_0\,, 0 \leq (1+\alpha_n)^n - 1 \leq \varepsilon$.

a)3) Conclure.

b) Retrouver cette limite par un calcul direct.

Partie II (Variante du théorème de Césaro)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k\right)$.

1) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

2) Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{C_n^k}{2^n} = 0$

Indice *: Pensez à la question* I°)1°).

3) En déduire que : Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n_0} C_n^k\right)$.

4) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On se propose de montrer, via la définition, que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Soit $\varepsilon \succ 0$:

a) Justifier l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $A = \max_{0 \leq k \leq n_0} (|u_k|)$.

b) Justifier l'existence d'un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq n_1$, $\frac{A}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n_0} C_n^k\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

c) Notons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. *Montrer que* $\forall n \geq n_2$, $|v_n| \leq \varepsilon$

d) Conclure.

5) Dans 4°) , on a ainsi montré que : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

La réciproque est en général fausse. Donner un exemple pour le prouver.