ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

MATHÉMATIQUES I - MP.

Filière MP

Extrait

B. Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit n un entier strictement positif, $x \in [0,1]$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre x. On note également $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E\big(f(Z_n)\big)$.

5) Rappeler, sans démonstration, la loi de S_n. En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.

6) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |\frac{k}{n} - x| \geqslant \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

7) Montrer que :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big(f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x)\Big)$$

Fin extrait

Soit n un entier strictement positif, $x \in [0,1]$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre x. On note également $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E\big(f(Z_n)\big)$.

5) Rappeler, sans démonstration, la loi de S_n. En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.

5)

i) $S_n \sim \mathcal{B}(n, x)$

ii) $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad \text{(linéarité de l'espérance)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x \quad (X_i \sim \mathcal{B}(x) \Rightarrow E(X_i) = x)$$

$$= nx$$

iii) $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \quad (X_1, ..., X_n \text{ indépendantes})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x(1-x) \quad (X_i \sim \mathcal{B}(x) \Rightarrow V(X_i) = x(1-x))$$

$$= nx(1-x)$$

6) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ |\frac{k}{n}-x|\geq\alpha}} P(S_n = k) \quad \left(\text{car } S_n \sim \mathcal{B}(n,x)\right)$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Rappel : $\displaystyle\sum_{k\in A} P(X=k) = \mathbb{P}(X\in A)$

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ |\frac{k}{n}-x|\geq\alpha}} P(S_n = k)$$

$$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right)$$

$$= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \alpha\right) \quad \left(\text{car } E(S_n) = nx\right)$$

$$\leq \frac{V(S_n/n)}{\alpha^2} \quad \left(\text{l'inég de B\_Tchb}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2\alpha^2} V(S_n)$$

D'où :

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{x(1-x)}{n\,\alpha^2} \qquad \left(V(S_n)=nx(1-x)\right)$$

Pour arriver à $\frac{1}{4n\alpha^2}$, il suffit de vérifier que $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$. Ce qui est vrai car :

$$\frac{1}{4}-x(1-x)=x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.$$

$\square$

7) Montrer que :

$$B_n(f)(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)$$

On a :

$$B_n(f)(x)-f(x)=E\left(f(Z_n)\right)-f(x)$$

$$=E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P(S_n=k)-f(x) \qquad \left(\text{formule du transfert}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P(S_n=k)-f(x)\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n}P(S_n=k)}_{=1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$\square$