CPGE MOHAMMEDIA **04 Mai 2018**

CCP - Maths 2

Corrigé par Taoufiki said

EXERCICE I

Q1.
• La symétrie découle de la commutativité de la multiplication.
• La bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale.
• Par positivité de l'intégrale, on a $\forall f \in E \ , \ (f|f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \geq 0$.
• Par positivité stricte de l'intégrale, la continuité et la positivité de f^2 sur $[-1,1]$ nous donne que

$$(f|f) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

Q2. On a $(u|u) = 2$, $(v|v) = \frac{2}{3}$ et $(u|v) = 0$, on pose $e = \frac{u}{\|u\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}u$ et $f = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}v$.
On a (e,f) est une base orthonormée de F.
Q3. On a $P_F(w) = (e|w)e + (f|w)f = \sinh(1) + \frac{3}{e}v$.
Par théorème de Pythagore, on a : $\|w\|^2 = \|w - P_F(w)\|^2 + \|P_F(w)\|^2$. Par théorème de distance à un sous-espace vectoriel, on a :

$$D := \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 dt\right] = d(w,F)^2 = \|w - P_F(w)\|^2$$

D'où

$$D = \|w\|^2 - \|P_F(w)\|^2 = \int_{-1}^{1} e^{2t}dt - \int_{-1}^{1} \left(\sinh(1) + \frac{3}{e}t\right)^2 dt = \sinh(2) - 2\sinh^2(1) - \frac{6}{e^2} = 1 - \frac{7}{e^2}$$

EXERCICE II

Q4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $i = 0, ..., k-1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-i}{n} = 1$.
Par multiplication de limites, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} = 1$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &= C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n}{n}.\frac{n-1}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n}.\frac{\lambda^k}{k!}.\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Comme $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \exp\left[(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right] \to e^{-\lambda}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} = 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Q5. Puisque les oraux passent en été, alors il est inutile de discuter la question des années bissextiles. Il s'agit donc d'une suite de n épreuves répétées indépendantes de Bernoulli et X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{365}$, on écrit

$$\mathbb{P}(X_n = k) = C_n^k \left(\frac{1}{365}\right)^k \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{n-k}$$

Q6. Ici $n = 219 \geq 50$, $p = \frac{1}{365} \leq 0,01$ et $np = 0,6 < 10$, donc la convention énoncée dans la question **Q4** nous conduit à approximer la loi de X_n par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 0,6$. D'où

$$\mathbb{P}(X_n = 2) \simeq \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \simeq 0,099$$

PROBLÈME

Q7. Comme u est diagonalisable, alors $\mathbb{R}^n = \sum\limits_{k=1}^{p} Ker(u - \lambda_k Id)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ de sorte que $x = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k$ et $\forall k = 1, ..., p$, $x_k \in Ker(u - \lambda_k Id)$

On sait que les polynômes de u commutent entre eux, donc pour tout $i = 1, ..., p$, on a

$$P(u)(x_i) = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (u - \lambda_k Id) \right) (u - \lambda_i Id)(x_i) = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (u - \lambda_k Id) \right) (0) = 0$$

Par linéarité de $P(u)$, on a $P(u)(x) = 0$. Ceci pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, d'où P annule u.

Q8. Les réels μ_i , $i = 1, ...r$ sont deux à deux distincts, alors les $X - \mu_i$, $i = 1, ...r$ sont deux à deux premier entre eux.

Puisque $Q = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \mu_i)$ est un polynôme annulateur de u, alors par le lemme des noyaux

$$\mathbb{R}^n = \sum_{i=1}^{r} Ker(u - \mu_i Id) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ \mu_i \in sp(u)}} Ker(u - \mu_i Id)$$

D'où u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ avec $sp(u) \subseteq \{\mu_1, ..., \mu_r\}$.

Q9. On a $\chi_V(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, donc $sp(V) = \{1, 2\}$, ce qui donne la

diagonalisibilité de V (car les valeurs propres sont simples).
On trouve $E_1(V) = vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(V) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a bien $V = PDP^{-1}$.
Q10. On a

$$\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

donc Q est inversible avec $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$.
La silmilitude de deux matrice est justifiée par l'égalité

$$\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$$

Q11. On trouve que

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & O_n \\ O_n & 2\Delta \end{pmatrix}$$

Par transitivité, la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \Delta & O_n \\ O_n & 2\Delta \end{pmatrix}$, donc elle est diagonalisable.
Q12. On pose $M = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ et $T(X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$.
D'après **Q10.**, on a

$$\forall i = 0, ..., p \ , \ \begin{pmatrix} A^i & O_n \\ O_n & 2^i A^i \end{pmatrix} = B^i = Q^{-1}.M^i.Q$$

donc $\begin{pmatrix} T(A) & O_n \\ O_n & T(2A) \end{pmatrix} = T(B) = Q^{-1}T(M)Q = O_{2n}$ puis $T(A) = O_n$.
La version matricielle du résultat de **Q8.** permet de conclure que A est diagonalisable, d'où la réciproque de **Q11.**
D'où A est diagonalisable si et seulement si M l'est.
Q13. On a $\chi_E(X) = X^2 - tr(E)X + \det(E) = (X-1)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}$ donc E est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
On cherche une matrice $P = Col(C_1, C_2)$ tel que $EC_1 = C_1$ et $EC_2 = -2C_1 + C_2$. En résolvant les deux systèmes, on prend par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on obtient

$$E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Q14. Tout comme dans **Q14.**, on vérifie que

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

Q15. On vérifie par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$.

On pose : $U(X)=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. On a :

$$O_{2n}=U(F)=\sum_{k=0}^{p} a_k F^k=\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k A^k & -2\sum_{k=0}^{p} a_k k A^k \\ O_n & \sum_{k=0}^{p} a_k A^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ O_n & U(A) \end{pmatrix}$$

Q16. Supposons l'existence d'une valeur propre non nulle de A. On a $U(A)=AU'(A)=O_n$, donc λ est une racine commune de deux polynômes U et XU', comme elle est non nulle alors, on a : $U(\lambda)=U'(\lambda)=0$, ce qui est contredit le fait que U est à racines simples.
Donc $sp(A)=\{0\}$. Le spectre d'une matrice ne peut pas être vide donc $sp(A)=\{0\}$. Puisque A est diagonalisable alors $\pi_A(X)=X$.
On en déduit que $A=O_n$.
Q17. la question **Q14** et la transitivité de la relation de similitude permettent de dire que $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement F l'est. Et la question précédente nous donne que si F est diagonalisable alors $A=O_n$. La réciproque est triviale.
On en conclut que

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow A=O_n$$

Q18. On a :

$$\begin{aligned} \chi_F(X) &= \det(X.I_{2n}-F) \\ &= \begin{vmatrix} X.I_n-A & 2A \\ O_n & X.I_n-A \end{vmatrix} \\ &= \det(X.I_n-A)^2 \\ &= \chi_A^2(X) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} F \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \chi_F \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow A \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Q19 On prend $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(X)=X^2+1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ puis $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ ne l'est pas aussi.

Q20. La matrice M s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$. Comme dans **Q.9**, on prend $V=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie qu'il existe $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifiant

$$V=PDP^{-1}$$

On pose : $Q=\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$. D'après **Q.10**, on a : $Q^{-1}.M.Q=\begin{pmatrix} 3A & O_n \\ O_n & -A \end{pmatrix}$.
Notons $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ et $f=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ où

$$f_1=(1,0,1,0)\ ,\ f_2=(0,1,0,1)\ ,\ f_3=(1,0,-1,0)\ ,\ f_4=(0,1,0,-1)$$

On a $Mat_e(f) = Q \in GL_4(\mathbb{R})$ donc f est une base de $\mathbb{R}^4$ avec $\mathcal{P}(e \to f) = Q$.
D'autre part

$$Mat_f(u) = Q^{-1}.Mat_e(u)Q = Q^{-1}.M.Q = \begin{pmatrix} 3A & O_n \\ O_n & -A \end{pmatrix}$$

D'où $vect(f_1, f_2)$ est $vect(f_3, f_4)$ sont deux plans de $\mathbb{R}^4$ stables par u.

Q21. Ici la matrice M s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} B & 2B \\ 2B & B \end{pmatrix}$ où $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donc M l'est aussi par **Q.11**.
Comme dans **Q.20**, on prend $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ et on aura

$$P^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} 3B & O_2 \\ O_2 & -B \end{pmatrix} = \underbrace{diag(6, 6, -2, -2)}_{\text{Notée } D}$$

.

Q22. Le système énoncé s'écrit $X' = MX$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et M la matrice définie dans la question **Q21**.
On a vu que $M = P.D.P^{-1}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \exp(tM) &= \exp(P.tD.P^{-1}) \\ &= P.\exp(tD).P^{-1} \\ &= P.diag(e^{6t}, e^{6t}, e^{-2t}, e^{-2t}).P^{-1} \end{aligned}$$

Les solutions du système différentiel sont $t \mapsto \exp(tM).C = P.diag(e^{6t}, e^{6t}, e^{-2t}, e^{-2t}).P^{-1}.C$ où $C \in M_{4,1}(\mathbb{R})$

Q23. Pour moi L'application φ ne porte aucune information sur e^M, donc je pense à utiliser les calculs de la questions précédentes et écrire :

$$\begin{aligned} e^M &= P.diag(e^6, e^6, e^{-2}, e^{-2}).P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^6.I_2 & O_2 \\ O_2 & e^{-2}I_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_2 & \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{2}I_2 & -\frac{1}{2}I_2 \end{pmatrix} \\ &= e^2 \begin{pmatrix} \cosh(4)I_2 & \sinh(4)I_2 \\ \sinh(4)I_2 & \cosh(4)I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour vos remarques, contactez moi sur "taoufiki-maths@hotmail.fr