Concours National commun - Session 2014

Extrait

Première partie :
Caractérisation des homothéties en dimension 2
Application au commutant

E désigne un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathscr{L}(E)$ l 'algèbre des endomorphismes de E. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $\mathscr{C}(f)$ l'ensemble des endomorpbismes de E qui commutent avec f : $\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E)/fg = gf\}$.

1.1 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1.1.1 Montrer que, pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, il existe un unique λ_x tel que $f(x)\lambda_x x$.

1.1.2 Soit (e_1, e_2) une base de E ; montrer que $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

1.1.3 On pose $\lambda = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$. Montrer que $f = \lambda id_E$ (homothétie de rapport λ).

1.2 Soit f un endomorphisme de E.

1.2.1 Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

1.2.2 Déterminer $\mathscr{C}(f)$ si f est une homothétie.

1.3 Soit f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

1.3.1 Justifier qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit une base de E.

1.3.2 Si $g \in \mathscr{L}(E)$, justifier qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $g(e) = \alpha e + \beta f(e)$ et montrer que $g \in \mathscr{C}(f)$ si et seulement si, $g = \alpha id_E + \beta f$.

1.3.3 Préciser $\mathscr{C}(f)$; quelle est sa dimension ?

1.4 Traduction matricielle : Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$; on pose $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})/AM = MA\}$.

1.4.1 Si A est une matrice scalaire, déterminer $\mathscr{C}(A)$.

1.4.2 Si A n'est pas une matrice scalaires, montrer que $\mathscr{C}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$; quelle est sa dimension ?

Fin extrait