

ÉPREUVE DES PETITES MINES, COMMUNE, 1995 - CORRIGE

Problème 2

Partie I

1. (a) i. Soit $P \in E$. Montrons que $\Delta(P)$ est une fonction polynôme et que $\deg \Delta(P) = -\infty$ si $\deg P \leq 0$ et $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$ sinon.
 – Si $\deg P \leq 0$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \lambda$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(P)(x) = \lambda - \lambda = 0$$

Donc $\Delta(P)$ est la fonction polynôme nulle, donc $\deg \Delta(P) = -\infty$.

- Sinon, en notant $n = \deg P$, il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Donc

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(P)(x) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (x+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left[(x+1)^k - x^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left[\left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i \right) - x^k \right] \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i \right) \\ &= \underbrace{a_n \binom{n}{n-1} x^{n-1}}_{=na_n \neq 0} + \underbrace{a_n \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} x^i + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i}_{\deg \leq n-2} \end{aligned}$$

Donc $\Delta(P)$ est une fonction polynôme de degré $n-1$.

En conclusion :

$\Delta(P)$ est une fonction polynôme. De plus :

$$\deg \Delta(P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg P \leq 0 \\ \deg P - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, si $n = \deg P \geq 1$ et a_n est le coefficient dominant de P , le coefficient dominant de $\Delta(P)$ est na_n

- ii. Nous savons que Δ est linéaire. Il reste à montrer que :

$$\forall P \in E_n \quad \Delta(P) \in E_n$$

Or la question précédente nous montre que si $\deg P \leq n$, alors $\deg \Delta(P) \leq n$.

En conclusion :

Δ induit un endomorphisme de E_n que l'on notera désormais E_n .

- (b) i. Soit $P \in E_n$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker } \Delta_n & \iff \Delta(P) = 0 \\ & \iff \deg \Delta(P) = -\infty \\ & \iff \deg P \leq 0 \quad \text{d'après la question 1.a.i} \\ & \iff P \in E_0 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\text{Ker } \Delta_n = E_0$$

- ii. D'après le théorème du rang :

$$\dim E_n = \dim \text{Im } \Delta_n + \dim \text{Ker } \Delta_n$$

Or $\dim E_n = n+1$ et $\dim \text{Ker } \Delta_n = \dim E_0 = 1$. Donc :

$$\text{rg } \Delta_n = \dim \text{Im } \Delta_n = n$$

D'après la question 1.a.i, $\text{Im } \Delta_n \subset E_{n-1}$. Comme ces deux espaces vectoriels sont de même dimension, on en déduit qu'ils sont égaux. En conclusion :

$$\text{Im } \Delta_n = E_{n-1}$$

2. (a) i. Soit $k \geq 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(N_k)(x) \\
&= N_k(x+1) - N_k(x) \\
&= \frac{(x+1)x(x-1)\cdots(x-k+2)}{k!} - \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \\
&= \frac{x(x-1)\cdots(x-k+2)}{k!} \underbrace{((x+1) - (x-k+1))}_{=k} \\
&= \frac{x(x-1)\cdots(x-(k-1)+1)}{(k-1)!} \\
&= N_{k-1}(x)
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall k \geq 1 \quad \Delta(N_k) = N_{k-1}}$$

ii. Montrons la propriété suivante par récurrence sur j :

$$\mathcal{P}_j : \ll \forall k \in \mathbb{N} \quad \Delta^j(N_k) = \begin{cases} N_{k-j} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \gg$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie. (immédiat)
- $\mathcal{P}_j \implies \mathcal{P}_{j+1}$. Soit $j \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_j$ est vraie. Montrons qu'il en est de même pour $\mathcal{P}_{j+1}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
 - Si $j \leq k$. Puisque $\mathcal{P}_j$ est vraie, on en déduit que $\Delta^j(N_k) = N_{k-j}$. Donc :

$$\Delta^{j+1}(N_k) = \Delta(\Delta^j(N_k)) = \Delta(N_{k-j})$$

- Si $k-j \geq 1$, c'est-à-dire si $j+1 \leq k$, $\Delta(N_{k-j}) = N_{k-j-1} = N_{k-(j+1)}$.
- Sinon, $N_{k-j} = N_0$ donc $\Delta N_{k-j} = 0$ donc $\Delta^{j+1}(N_k) = 0$.
- Sinon, $\Delta^j(N_k) = 0$ donc $\Delta^{j+1}(N_k) = 0$.

Donc $\mathcal{P}_{j+1}$ est vraie.

Par récurrence sur j on en déduit que $\mathcal{P}_j$ est vrai quelque soit $j \in \mathbb{N}$. En conclusion :

$$\boxed{\forall j, k \in \mathbb{N} \quad \Delta^j(N_k) = \begin{cases} N_{k-j} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Remarquons que $N_k(0) = 0$ si $k \geq 1$ et $N_0(0) = 1$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall j, k \in \mathbb{N} \quad (\Delta^j(N_k))(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(b) i. Montrons que la famille $N_0, \dots, N_n$ est une base de E_n . Puisque cette famille possède $n+1$ éléments et que $\dim E_n = n+1$, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_0 N_0 + \dots + \lambda_n N_n = 0$$

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors en appliquant Δ^j à l'égalité précédente et en évaluant en 0, on obtient (d'après la question précédente) $\lambda_j = 0$. La famille $N_0, \dots, N_n$ est donc libre. En conclusion :

$$\boxed{\text{La famille } N_0, \dots, N_n \text{ est une base de } E_n.}$$

ii. Soit $P \in E_n$. Puisque $N_0, \dots, N_n$ est une base de E_n , il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = a_0 N_0 + \dots + a_n N_n$$

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors, en appliquant Δ^j puis en évaluant en 0 l'égalité précédente, on obtient (toujours d'après la question 2.a.ii) $a_j = (\Delta^j(P))(0)$. En conclusion :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad a_j = (\Delta^j(P))(0)}$$

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Alors, une récurrence immédiate sur k nous montre que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad (T^k(f))(x) = f(k+x)}$$

(b) Soit $j \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$.

i. Puisque T et Id commutent dans $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, on en déduit en appliquant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\Delta^j &= (T - \text{Id}_{\mathcal{F}})^j \\
&= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} T^k (-\text{Id}_{\mathcal{F}})^{j-k} \\
&= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} T^k
\end{aligned}$$

Donc :

$$\Delta^j(f) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} T^k(f)$$

D'après la question précédente, on en déduit finalement que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad (\Delta^j(f))(x) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} f(x+k)}$$

ii. D'après la question précédente :

$$(\Delta^j(f))(0) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} f(k)$$

En particulier, $(\Delta^j(f))(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0, 1, \dots, j$.

Partie II

1. (a) Montrons que Φ est un isomorphisme.
- Φ est linéaire (évident).
 - Φ est injective. En effet, montrons que $\text{Ker } \Phi = \{0\}$. Soit $P \in E_n$ tel que $\Phi(P) = (0, \dots, 0)$. Alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(k) = 0$$

Donc P admet $n+1$ racines 2 à 2 distinctes. Puisque $\deg P \leq n$, on en déduit que $P = 0$.

Puisque $\dim E_n = \dim \mathbb{R}^{n+1} (= n+1)$ et que Φ est injective, on en déduit que Φ est un isomorphisme. En conclusion :

$$\Phi \text{ est un isomorphisme de } E_n \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1}.$$

- (b) L'existence d'une solution au problème $\mathcal{P}$ découle de la surjectivité de Φ et son unicité découle de l'injectivité de Φ . La question précédente permet donc de conclure :

$$\boxed{\text{Le problème } \mathcal{P} \text{ possède une unique solution } \mathcal{P}_f.}$$

2. (a) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la question 3.b.ii :

$$\begin{aligned} (\Delta^j(f))(0) &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} f(k) \\ &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} P_f(k) \quad \text{car } P_f \text{ est solution du problème } \mathcal{P} \\ &= (\Delta^j(P_f))(0) \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (\Delta^j(f))(0) = (\Delta^j(P_f))(0)}$$

- (b) D'après la question 2.b.ii :

$$P_f = \sum_{j=0}^n (\Delta^j(P_f))(0) N_j$$

On en déduit donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{P_f = \sum_{j=0}^n (\Delta^j(f))(0) N_j}$$

FIN

