

Matrices magiques

Dans tout le problème les matrices utilisées appartiennent à $M_3(\mathbb{R})$.

Toute matrice M de $M_3(\mathbb{R})$ est notée : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & \ell & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$.

On appelle $\mathcal{B}$ la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$. Elle est formée des matrices :

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire : $M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + kE_4 + \ell E_5 + mE_6 + rE_7 + sE_8 + tE_9$.

A une telle matrice on associe les huit nombres :

$J \neq 0$

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note :

$\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques,

$\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques,

$\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par la matrice J

$\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices pour lesquelles le nombre $s_7(M)$ est nul (matrices de trace nulle).

$\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $M_3(\mathbb{R})$ i.e. des matrices dont les 8 nombres $s_1, s_2, \dots, s_8$ sont égaux entre eux.

- 1.a Justifier que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans $M_3(\mathbb{R})$.
- 1.b Quelles sont les dimensions de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$?
- 1.c Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
Quelle est sa dimension ?
2. On considère l'application φ qui, à la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$, associe l'élément $(s_1, s_2, \dots, s_8)$ de $\mathbb{R}^8$.
 - 2.a Montrer que φ est une application linéaire.
 - 2.b Ecrire la matrice de φ en rapportant l'espace de départ $M_3(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^8$ à sa base canonique notée $\mathcal{C}$.
 - 2.c Montrer que le rang de cette matrice est 7.
On pourra remarquer que l'une des lignes est combinaison linéaire des autres, puis considérer une combinaison linéaire nulle des autres lignes.
 - 2.d En déduire la dimension du noyau de φ .
- 3.a Justifier que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
- 3.b Montrer que $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ et $\mathcal{V}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}$.
- 3.c En observant que $\mathcal{M} \cap \mathcal{T} = \ker \varphi$, déterminer la dimension $\mathcal{M}$.
- 4.a Déterminer une matrice de $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ symétrique dont le coefficient d'indice (1,1) vaut 1.

- 4.b Déterminer une matrice de $\mathcal{M} \cap \mathcal{T}$ antisymétrique dont le coefficient d'indice $(1,3)$ vaut 1.
- 4.c Former une base de $\mathcal{M}$.
- 5. Montrer qu'il n'existe qu'une matrice magique vérifiant $a = 1, b = 2, c = 3$ et donner celle-ci.