

Suites et séries de fonctions

Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Exercice 1 [00868] [Correction]

Établir que la limite simple d'une suite de fonctions de I vers \mathbb{R} convexes est convexe.

Exercice 2 [00885] [Correction]

Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue. Montrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)$ converge uniformément.

Exercice 3 [00884] [Correction]

Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg .

Exercice 4 [00886] [Correction]

Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues d'un intervalle I de \mathbb{R} vers \mathbb{R} est elle-même une fonction uniformément continue.

Exercice 5 [00878] [Correction]

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues et définies sur $[a; b]$. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction f . Montrer

$$\inf_{[a;b]} f_n \rightarrow \inf_{[a;b]} f$$

Exercice 6 [00879] [Correction]

On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a; b]$ vers \mathbb{R} converge uniformément vers $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a; b]$ convergeant vers x . Montrer

$$f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

Exercice 7 [00894] [Correction]

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f .

- Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N , on ait pour tout réel x , $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geq N$?
- Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

Exercice 8 [03461] [Correction]

Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur \mathbb{R} . Montrer que la fonction f est polynomiale.

Etude pratique de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 9 [00871] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ sur $[0; 1]$.

Exercice 10 [00872] [Correction]

Étudier la convergence uniforme de $f_n: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

Exercice 11 [00870] [Correction]

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0; +\infty[$.
- Étudier la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.
- Étudier la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Exercice 12 [00873] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = nx^2 e^{-nx} \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur \mathbb{R}_+ puis sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.**Exercice 13** [00874] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur \mathbb{R} puis sur $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$ avec $a > 0$.**Exercice 14** [00875] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f_n(0) = 0$$

- Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur \mathbb{R} .
- Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a; a]$ avec $a > 0$.

Exercice 15 [02527] [Correction]Étudier la convergence simple et uniforme sur \mathbb{R} de la suite de fonctions (f_n) donnée par

$$f_n(x) = \sin^n(x) \cos(x)$$

Exercice 16 [02518] [Correction]Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

Exercice 17 [02830] [Correction]On pose, pour $x \geq 0$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.**Exercice 18** [00876] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 19 [00877] [Correction]

On pose

$$f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}) \text{ pour } x \in [0; 1]$$

Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 20 [00881] [Correction]Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$$

- Étudier la limite simple de la suite (f_n) .
- Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 21 [02972] [Correction]Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0; n[\text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n$$

Étudier le mode de convergence de (f_n) .**Exercice 22** [00890] [Correction]Soit $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

- Étudier la limite simple de (f_n) et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq \lim f_n(x)$$

b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

justifier que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0; a]$ (avec $a > 0$).

c) Établir qu'en fait, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 23 [00892] [Correction]

Soit $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n) .

b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

c) Étudier la convergence uniforme sur $[a; 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 24 [00891] [Correction]

Pour $x \in [0; \pi/2]$, on pose $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$.

a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n) .

b) Calculer

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$$

La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?

c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0; \pi/2[$.

Exercice 25 [02532] [Correction]

a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ définies sur \mathbb{R}_+ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.

c) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n} e^{-nx}) dx$$

Exercice 26 [02860] [Correction]

Soit (f_n) la suite de fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f_0(x) = x \text{ et } f_{n+1}(x) = \frac{x}{2 + f_n(x)} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 27 [02831] [Correction]

Soit $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ donnée par

$$f(x) = 2x(1 - x)$$

Étudier la convergence de (f_n) où f_n est l'itéré n -ième de f .

Exercice 28 [02970] [Correction]

On note E l'ensemble des fonctions $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues.

On pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

pour toute $f \in E$.

On pose $f_0 = 1$ puis $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Étudier la suite (f_n) .

b) Soit $f = \lim(f_n)$.

Trouvez une équation différentielle dont f est solution.

Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Etude théorique de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 29 [00883] [Correction]

Soit $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x + 1/n$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2) .

Exercice 30 [00869] [Correction]

Soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$$

Montrer que chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 et que la suite (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 31 [00887] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.

Montrer que la suite des fonctions

$$g_n: x \mapsto n(f(x + 1/n) - f(x))$$

converge uniformément vers f' .

Exercice 32 [00888] [Correction]

Soit $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante et continue telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 33 [00889] [Correction]

[Théorème de Dini] Soient des fonctions $f_n: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

On suppose que pour tout $x \in [a; b]$, la suite réelle $(f_n(x))$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

a) Justifier l'existence de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty$$

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a; b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.

c) En observant que pour tout $p \leq n$,

$$f_n(x_n) \leq f_p(x_n)$$

montrer que $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$ et conclure.

Exercice 34 [02969] [Correction]

Soit I un intervalle ouvert ; soit pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que (f_n) converge simplement.

Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Exercice 35 [02833] [Correction]

On note U l'ensemble des complexes de module 1 et on considère ω un complexe de module $\neq 1$.

Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z - \omega}$$

soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 36 [03902] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(t) = n(f(t + 1/n) - f(t))$$

Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} vers une fonction à préciser.

Fonction solution d'équations fonctionnelles

Exercice 37 [00893] [Correction]

On définit (u_n) suite de fonctions de $[0; 1]$ vers \mathbb{R} par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

a) Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) En déduire la convergence pour tout $x \in [0; 1]$ de la suite $(u_n(x))$.

c) Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

Exercice 38 [03891] [Correction]

Soit $\gamma \in [0; 1[$. On définit (u_n) suite de fonctions de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R} par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t) dt$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

b) En déduire la convergence pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ de la suite $(u_n(x))$.

c) Établir que la suite de fonctions (u_n) converge vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(\gamma x)$$

Exercice 39 [00903] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

a) Justifier que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

b) Préciser le sens de variation de S .

c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

d) Donner un équivalent de S en 0.

e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 40 [03777] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

a) Montrer que F est bien définie.

b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 , de classe \mathcal{C}^∞ .

c) Simplifier

$$F(x) + F(x+1)$$

d) Montrer que pour $x > 0$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

e) Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 41 [00913] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)}$$

a) Justifier que S est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

b) Former une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$.

c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0.

Exercice 42 [00914] [Correction]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f_n(x) = \text{th}(x+n) - \text{th } n$$

a) Établir la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

b) Justifier que la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

c) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x+1) - S(x) = 1 - \text{th } x$$

d) Étudier la convergence de S en $+\infty$.

Exercice 43 [03754] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable.

Montrer l'existence d'une fonction $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x+1) - g(x) = f(x)$$

Exercice 44 [00912] [Correction]

On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

et on pose pour $x > 0$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

a) Justifier que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

b) Préciser le sens de variation de S .

c) Établir que

$$xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$$

d) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

e) Donner un équivalent de S en 0.

Exercice 45 [00898] [Correction]

Justifier l'existence de

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Montrer que f est 1-périodique et qu'on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 46 [02974] [Correction]

a) Étudier la convergence de la série de fonctions

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Soit un réel $c > 2$. Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que, pour tout x réel,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = cf(x)$$

Montrer que $f = 0$.

c) Montrer que pour tout x réel non entier,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$$

Exercice 47 [02973] [Correction]

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

Exercice 48 [03978] [Correction]

a) Montrer qu'il existe une unique fonction $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$ et vérifiant

$$\forall x > 0, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

b) Montrer que f est continue et intégrable sur $[1; +\infty[$.

c) Calculer

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt$$

Exercice 49 [04104] [Correction]

On étudie l'équation fonctionnelle

$$(E): f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$$

a) Quelles sont les solutions constantes sur \mathbb{R} ?

b) Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $f(x) = xh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur h , la fonction f est-elle solution de (E) ?

c) On définit par récurrence une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} en posant : $h_0: x \mapsto 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Pour $x \in [0; 1]$, soit $T_x: y \mapsto y - xy^2/2$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0; 1]$ et que $T_x([0; 1]) \subset [0; 1]$.

Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

d) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $[0; 1]$.

e) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur \mathbb{R}_+ .

Etude de la convergence d'une série de fonctions

Exercice 50 [00895] [Correction]

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 51 [00896] [Correction]

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 52 [00897] [Correction]

On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0; +\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x)$$

Exercice 53 [03770] [Correction]

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur \mathbb{R}_+ .

Étudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme.

Exercice 54 [03785] [Correction]

On introduit l'application sur $[0; +\infty[$

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

- Étudier les convergences de la suite de fonctions (f_n) .
- Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 55 [02838] [Correction]

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n : x \in [0; 1] \mapsto n^\alpha x^n (1-x) \in \mathbb{R}$$

Étudier le mode convergence de la suite de fonctions (u_n) , puis de la série de fonctions $\sum u_n$.

Exercice 56 [00882] [Correction]

Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n f(x)$$

- Former une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0; 1]$.
- Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ si, et seulement si, $f(1) = 0$ et f dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

Exercice 57 [03295] [Correction]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0; 1]$$

- Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
- Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.
- Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \rightarrow 0$.

Exercice 58 [02839] [Correction]

On pose

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

pour tout réel $x \in [0; 1]$ et tout entier naturel n .

Montrer que la série de terme général u_n est normalement convergente.

Exercice 59 [03988] [Correction]

Soit $u_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{(1+n^2x)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum u_n$ et $\sum u'_n$.

Fonctions zêta

Exercice 60 [00907] [Correction]

On pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- Montrer que la fonction ζ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1; +\infty[$.
- Étudier monotonie et convexité de la fonction ζ .
- Déterminer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
- Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1^+ .
- En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz établir que $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe.

Exercice 61 [02834] [Correction]

Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$?
- Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle?
- Si

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$

montrer que F est continue sur $[-1; 1[$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1; 1[$.

- Donner une expression plus simple de $F(x)$

Exercice 62 [00908] [Correction]

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Exercice 63 [00909] [Correction]

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que ζ_2 est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 64 [03853] [Correction]

Déterminer la limite quand $x \rightarrow 0^+$ de

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

Exercice 65 [00899] [Correction]

Soient

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

- Déterminer les domaines de définition des fonctions ζ et ζ_2 .
- Justifier que les fonctions ζ et ζ_2 sont continues.
- Établir la relation $\zeta_2(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

Intégration de la somme d'une série de fonctions

Exercice 66 [00900] [Correction]

Soit

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

Justifier et calculer

$$\int_0^1 \psi(x) dx$$

Exercice 67 [00911] [Correction]

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0; 1]$.

c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 68 [00920] [Correction]

On donne

$$\forall \alpha \in [0; 1], \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \pi \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{sh} \pi \alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

(prolongée par continuité en 0).

En intégrant sur $[0; 1]$, en déduire la valeur de

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Limite et comportement asymptotique de la somme de série de fonctions

Exercice 69 [02558] [Correction]

Ensemble de définition et continuité de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+ .

Exercice 70 [00139] [Correction]

Pour $t > 0$, on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$$

Déterminer la limite de $S(t)$ quand $t \rightarrow 0^+$.

Exercice 71 [00910] [Correction]

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$$

a) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.

b) Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

Exercice 72 [00917] [Correction]

Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 73 [00918] [Correction]

Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}$$

On pourra exploiter le théorème d'interversion limite/somme infinie.

Exercice 74 [00919] [Correction]

Par une interversion série-limite, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \exp(z)$$

Etude pratique de fonctions somme de série

Exercice 75 [00901] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$$

a) Montrer que S est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

b) Montrer que S est continue.

- c) Étudier la monotonie de S .
 d) Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.
 e) Déterminer un équivalent à S en 0.

Exercice 76 [00902] [Correction]

Sur $I =]-1; +\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

- a) Montrer que S est définie et continue sur I .
 b) Étudier la monotonie de S .
 c) Calculer

$$S(x+1) - S(x)$$

- d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+ .
 e) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

- f) En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 77 [00906] [Correction]

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

- a) Quel est le domaine de définition de f ?
 Étudier la continuité de f sur celui-ci.
 b) Montrer que f est strictement décroissante.
 c) Étudier la limite de f en $+\infty$.
 d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 78 [00915] [Correction]

Pour $x \geq 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

- a) Pour quelles valeurs de x dans \mathbb{R}_+ , $S(x)$ est définie?
 b) Former une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \neq 0$.
 c) Étudier la continuité de S sur $[0; 1[$ puis sur $]1; +\infty[$.
 d) Dresser le tableau de variation de S .

Exercice 79 [02837] [Correction]

On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S . Donner un équivalent de S en 0 et en 1^- .

Exercice 80 [03203] [Correction]

Définition, continuité et dérivabilité de

$$S: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

Exercice 81 [02529] [Correction]

Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$$

est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Exercice 82 [03427] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_n(x) = \arctan\sqrt{n+x} - \arctan\sqrt{n}$$

- a) Étudier l'existence et la continuité de la fonction S définie sur \mathbb{R}_+ par la relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

- b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 83 [03797] [Correction]

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

- a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- b) Donner, à l'aide d'une comparaison intégrale, un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
- c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0. On donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 84 [03194] [Correction]

Définition, continuité et classe \mathcal{C}^1 de

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

Exercice 85 [00904] [Correction]

Pour $t > 0$, on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nt}$$

- a) Justifier que S est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
- b) Étudier la limite de S en $+\infty$.
- c) Établir que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Exercice 86 [03644] [Correction]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n + x^2}$$

- a) Montrer que la fonction S est bien définie et étudier sa parité.
- b) Montrer que la fonction S est continue.
- c) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 87 [00916] [Correction]

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1 + x^n}$$

- a) Justifier que la fonction $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- b) Établir que pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

- c) Établir que f est continue sur $] -1; 1[$ puis que f est continue sur $] -\infty; -1[$ et $] 1; +\infty[$.
- d) Établir la continuité de f en 1.

Exercice 88 [02835] [Correction]

Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x + k)}$$

- a) Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- b) Montrer

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right)$$

- c) Montrer que Γ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 89 [00905] [Correction]

On fixe $\alpha > 0$ et on pose

$$f_n(x) = e^{-n^\alpha x} \text{ et } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

- a) Domaine de définition de f ?
- b) Continuité de f ?
- c) Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 90 [02836] [Correction]

Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x , on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}$$

On note I le domaine de définition de

$$S: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

- Déterminer I .
- Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- A-t-on convergence normale sur \mathbb{R}_+^* ?
- On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur I ?

- Étudier la continuité de S sur I .

Exercice 91 [02971] [Correction]

Soit des suites réelles (a_n) et (x_n) avec $a_n > 0$ pour tout n .

On suppose que la série de terme général $a_n(1 + |x_n|)$ converge.

On pose

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x - x_n|$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

Exercice 92 [04070] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_n(x) = \arctan(n+x) - \arctan(n)$$

- Étudier l'existence et la continuité de la fonction S définie sur \mathbb{R}_+ par la relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

- Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 93 [04071] [Correction]

Pour $x \in [0; +\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Montrer que la fonction S est bien définie, de classe \mathcal{C}^1 et préciser son sens de variation.

Suites et séries de fonctions vectorielles

Exercice 94 [01186] [Correction]

Soit E une algèbre de dimension finie munie d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall a, b \in E, \|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

- Soit $a \in E$ vérifiant $\|a\| < 1$. Montrer que $1_E - a$ est inversible et exprimer son inverse comme la somme d'une série.
- Montrer que l'application $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$ est continue en 1_E .
- Montrer que l'application $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$ est continue.

Exercice 95 [04095] [Correction]

- Pour quel $z \in \mathbb{C}$ peut-on définir

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-z)}?$$

- Établir que la fonction f est continue sur le domaine correspondant.

Exercice 96 [00574] [Correction]

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$, on pose

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k$$

- a) Montrer que f est bien définie et que $f(t) = (I - tA)^{-1}$.
b) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et que $f'(t) = A(I - tA)^{-2}$.

Exercice 97 [00573] [\[Correction\]](#)

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$ on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^k A^k$$

- a) Montrer que f est bien définie.
b) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et que

$$(I - tA)f'(t) = A$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Supposons que la suite (f_n) converge simplement vers f sur I avec chaque f_n convexe.

Pour tout $a, b \in I$ et $\lambda \in [0; 1]$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f_n(a) + (1 - \lambda)f_n(b)$$

À la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

ce qui fournit la convexité de f .

Exercice 2 : [énoncé]

Par uniforme continuité, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - y| \leq \alpha \implies |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$$

Pour n assez grand, on a

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha$$

et donc

$$\forall x \in I, |g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$$

Ainsi, il y a convergence uniforme de $(g \circ f_n)$ vers $g \circ f$.

Exercice 3 : [énoncé]

On peut écrire

$$\|f_n g_n - f g\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty$$

Or $\|f_n\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$ et donc la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée car convergente. Par opération sur les limites, on obtient alors

$$\|f_n g_n - f g\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

car $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ et $\|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$.

Exercice 4 : [énoncé]

Soit (f_n) une suite de fonctions uniformément continue de I vers \mathbb{R} convergeant uniformément vers $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$.

La fonction f_n étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall x, y \in I, |x - y| \leq \alpha \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

Or

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

donc

$$\forall x, y \in I, |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$$

Ainsi f est uniformément continue.

Exercice 5 : [énoncé]

Posons

$$m_n = \inf_{t \in [a; b]} f_n(t)$$

Puisque la fonction f_n est continue sur le segment $[a; b]$, cet infimum est une valeur prise par f_n et donc il existe $t_n \in [a; b]$ tel que

$$m_n = f_n(t_n)$$

Montrons que $m_n \rightarrow m$ avec

$$m = \inf_{t \in [a; b]} f$$

La fonction f est continue car limite uniforme d'une suite de fonctions continues et donc il existe $t_\infty \in [a; b]$ pour lequel

$$m = f(t_\infty)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

et donc

$$m_n = f_n(t_n) \geq f(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$$

et

$$m = f(t_\infty) \geq f_n(t_\infty) - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon$$

Ainsi

$$|m_n - m| \leq \varepsilon$$

On peut alors affirmer $m_n \rightarrow m$.

Exercice 6 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \|f_n - f\|_{\infty, [a; b]} \leq \varepsilon$$

et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_2, |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon$$

car $f(x_n) \rightarrow f(x)$ en vertu de la continuité de f .

Pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a

$$\forall n \geq n_0, |f_n(x_n) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

Exercice 7 : [\[énoncé\]](#)

a) Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|P_n - f\|_{\infty} \leq 1/2$$

et donc $\|P_n - P_N\|_{\infty} \leq 1$.

Seules les fonctions polynomiales constantes sont bornées sur \mathbb{R} donc $P_n - P_N$ est une fonction polynomiale constante. Posons λ_n la valeur de celle-ci.

b) On a

$$\lambda_n = P_n(0) - P_N(0) \rightarrow f(0) - P_N(0) = \lambda_{\infty}$$

et donc $(P_n) = (P_N + P_n - P_N)$ converge simplement vers $P_N + \lambda_{\infty}$. Par unicité de limite $f = P_N + \lambda_{\infty}$ est une fonction polynomiale.

Exercice 8 : [\[énoncé\]](#)

Pour $\varepsilon = 1$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, P_n - f \text{ est bornée et } \|P_n - f\|_{\infty} \leq 1$$

Pour tout $n \geq N$, on peut alors affirmer que le polynôme

$P_n - P_N = (P_n - f) - (P_N - f)$ est borné et donc constant. Puisque la suite (P_n) converge uniformément vers f , la suite $(P_n - P_N)_{n \geq N}$ converge uniformément vers $f - P_N$. Or cette suite étant formée de fonctions constantes, sa convergence équivaut à la convergence de la suite de ces constantes. En posant C la limite de cette suite, on obtient

$$f = P_N + C$$

et donc f est une fonction polynôme.

Exercice 9 : [\[énoncé\]](#)

Les fonctions u_n sont continues sur $[0; 1]$ pour $n \geq 1$ et dérivables sur $]0; 1]$ avec

$$u'_n(x) = x^{n-1}(1 + n \ln x)$$

Le tableau de variation de u_n donne

$$\sup_{[0; 1]} |u_n| = -u_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \rightarrow 0$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 10 : [\[énoncé\]](#)

Pour $x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) \rightarrow 0$ car $|f_n(x)| \leq \frac{x}{n}$.

On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1+(1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

x	0	x_n	$+\infty$
$f_n(x)$	0	M_n	0

donc

$$\|f_n\|_{\infty} = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1 + \frac{1}{n-1})} = \frac{e^{-\frac{1}{n} \ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \rightarrow 0$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 11 : [\[énoncé\]](#)

a) Soit $x \in [0; +\infty[$.

Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Si $x > 0$ alors $u_n(x) \rightarrow 0$ car $e^{-nx} \rightarrow 0$.

La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ .

b) On a

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |u_n(x)| \leq e^{-na} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

c) Puisque

$$\|u_n\|_\infty \geq u_n(\pi/2n) = e^{-\pi/2} \not\rightarrow 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 12 : [énoncé]

$f'_n(x) = nx(2 - nx)e^{-nx}$, le tableau de variation de f_n donne

$$\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n| = f_n(2/n) = \frac{4}{n} e^{-2} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur \mathbb{R} et donc *a fortiori* sur $[a; +\infty[$.

Exercice 13 : [énoncé]

$f_n(0) \rightarrow 1$ et $f_n(x) \rightarrow 0$ pour $x \neq 0$. La fonction limite n'étant pas continue, il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R} . En revanche si $|x| \geq |a|$ alors

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{(1 + a^2)^n} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 14 : [énoncé]

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nul ou non, on a $f_n(x) \rightarrow 0$. Il y a convergence simple vers la fonction f nulle. On a

$$f_n(x) - f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \times \frac{1}{nx} = \frac{x}{n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

La fonction $f_n - f$ n'étant pas bornée sur \mathbb{R} , il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R} .

b) Sur $[-a; a]$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n} \rightarrow 0$$

via $|\sin t| \leq |t|$. Par suite il y a convergence uniforme sur $[-a; a]$.

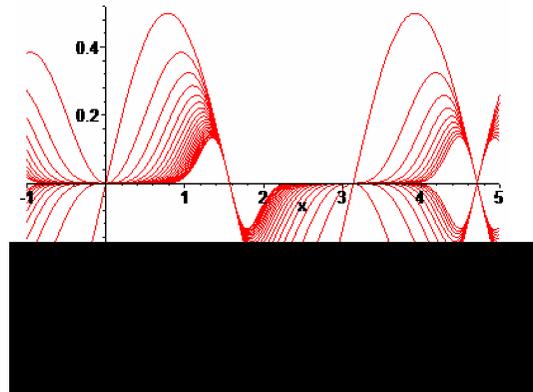


FIGURE 1 – Les premières fonctions de la suite (f_n)

Exercice 15 : [énoncé]

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} \in]\pi]$ on a $|\sin x| < 1$ et donc $f_n(x) \rightarrow 0$.

Pour $x = \frac{\pi}{2} \in]\pi]$, $\cos x = 0$ et donc $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Par 2π périodicité et parité on ne poursuit l'étude qu'avec $x \in [0; \pi]$. La fonction f_n est dérivable avec

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1)$$

On peut dresser le tableau de variation de f_n sur $[0; \pi]$ et on obtient

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \left| f_n \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right| = \left(1 - \frac{1}{(n+1)} \right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$$

La suite de fonction (f_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 16 : [énoncé]

f_n est définie sur \mathbb{R}^* et peut être prolongée par continuité en 0 en posant sur $f_n(0) = n$.

Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \rightarrow +\infty$.

Pour $x > 0$, $f_n(x) \rightarrow 0$.

Ainsi, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+^* .

Il ne peut y avoir convergence uniforme sur \mathbb{R}_+^* car alors, par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$$

donne $0 = +\infty$.

Pour $a > 0$, sur $[a; +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-a^2}}$$

et par étude fonctionnelle $nx^2 e^{-nx} \leq \frac{4}{n} e^2$ (maximum en $x = 2/n$) donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{4e^2}{n(1 - e^{-a^2})} \rightarrow 0$$

qui donne la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$.

Exercice 17 : [énoncé]

Quand $p \rightarrow +\infty$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \rightarrow \frac{1}{1+x} = f(x)$$

On a

$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p} - 1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Or, pour $\alpha \in]0; 1]$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer

$$0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

pour tout $x \geq 0$ et donc

$$|f(x) - f_p(x)| \leq \frac{1}{p} \frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \leq \frac{1}{p} \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{p}$$

Puisque $\|f - f_p\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 18 : [énoncé]

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \left| f_n(\pm 1/\sqrt{n2^n}) \right| = \frac{\sqrt{2^n}}{2^n} \rightarrow +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur \mathbb{R} .

Or $\pm 1/\sqrt{n2^n} \rightarrow 0$ et donc d'après le tableau de variation de f_n , pour tout $a > 0$,

on a, pour n assez grand,

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a) \rightarrow 0$$

Ainsi, il y a convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ et de même sur $]-\infty; -a]$.

En revanche, il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 0.

Exercice 19 : [énoncé]

On a

$$\sup_{x \in [0; 1]} |f_n(x)| = f_n\left(1/\sqrt[2^n]{2}\right) = 4^{n-1} \rightarrow +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0; 1]$.

Or $1/\sqrt[2^n]{2} \rightarrow 1$ et donc d'après le tableau de variation de f_n , pour tout $a \in [0; 1[$, on a, pour n assez grand,

$$\sup_{x \in [0; a]} |f_n(x)| = f_n(a) \rightarrow 0$$

Ainsi il y a convergence uniforme sur $[0; a]$. En revanche il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 1.

Exercice 20 : [énoncé]

a) Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Si $x \in]0; 1]$ alors $f_n(x) \rightarrow 0$ par comparaison des suites de référence.

b) $f'_n(x) = n^\alpha(1-x)^n - n^{\alpha+1}x(1-x)^{n-1} = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$.
Après étude des variations

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^\alpha \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n+1})} = e^{-1+o(1)} \rightarrow e^{-1}$$

donc $\|f_n\|_\infty \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e}$.

Il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercice 21 : [énoncé]

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour n assez grand

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n = \exp(n \ln(1 - x/n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x}$$

La suite (f_n) converge simplement vers $f: x \mapsto e^{-x}$ avec $f_n \leq f$.

Étudions $\delta_n = f - f_n \geq 0$.

Pour $x \in [n; +\infty[$, $\delta_n(x) = e^{-x} \leq e^{-n}$.

Pour $x \in [0; n[$, $\delta_n(x) = e^{-x} - (1 - x/n)^n$ et $\delta'_n(x) = -e^{-x} + (1 - x/n)^{n-1}$.
 Posons

$$\varphi_n(x) = (n - 1) \ln(1 - x/n) + x$$

On a

$$\varphi'_n(x) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{x/n-1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$$

est du signe de $1 - x$.

Par étude des variations de φ_n , on obtient l'existence de $x_n \in [0; n[$ tel que $\varphi_n(x) \geq 0$ pour $x \leq x_n$ et $\varphi_n(x) \leq 0$ pour $x \geq x_n$. On en déduit que pour $x \leq x_n$, $\delta'_n(x) \geq 0$ et pour $x \geq x_n$, $\delta'_n(x) \leq 0$. Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty, [0; n[} = \delta_n(x_n) = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n} e^{-x_n}$$

Puisque la fonction $x \mapsto x e^{-x}$ est bornée par un certain M sur \mathbb{R}_+ , on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty, [0; n[} \leq \frac{M}{n}$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty, [0; +\infty[} \leq \max\left(\frac{M}{n}, e^{-n}\right) \rightarrow 0$$

On peut donc affirmer que la suite (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}_+ vers f .

Exercice 22 : [\[énoncé\]](#)

a) $f_n(x) = \exp(-n \ln(1 + \frac{x}{n})) = \exp(-x + o(1)) \rightarrow e^{-x} = f(x)$.

On sait $\ln(1 + t) \leq t$ donc par opérations : $f_n(x) \geq e^{-x}$

b) On sait

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t) \leq t$$

donc

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln(1 + \frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$$

puis

$$e^{-x} \leq f_n(x) \leq e^{-x + \frac{x^2}{2n}} = e^{-x} e^{\frac{x^2}{2n}}$$

Sur $[0; a]$ on a $e^{\frac{x^2}{2n}} \leq e^{\frac{a^2}{2n}} \rightarrow 1$.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|e^{a^2/2n} - 1| \leq \varepsilon$.

On a alors pour tout $x \in [0; a]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq e^{-x} (e^{x^2/2n} - 1) \leq e^{a^2/2n} - 1 \leq \varepsilon$$

Par suite $f_n \xrightarrow{CU}_{[0; a]} f$.

c) Les fonctions f_n sont décroissantes donc

$$\forall x \geq a, f_n(x) \leq f_n(a)$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $e^{-a} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq a$,

$$e^{-x} \leq \varepsilon/3$$

Puisque $f_n(a) \rightarrow e^{-a}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |f_n(a) - e^{-a}| \leq \varepsilon/3$$

Mais alors $\forall x \geq a$,

$$|f_n(x) - e^{-x}| \leq f_n(x) + e^{-x} \leq f_n(a) + e^{-x} \leq (f_n(a) - e^{-a}) + e^{-a} + e^{-x} \leq \varepsilon$$

De plus, $f_n \xrightarrow{CU}_{[0; a]} f$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N', \forall x \in [0; a] |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon$$

Finalement

$$\forall n \geq \max(N, N'), \forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon$$

Ainsi $f_n \xrightarrow{CU}_{\mathbb{R}_+} f$.

Exercice 23 : [\[énoncé\]](#)

a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a aussi $f_n(x) = 0$ pour n assez grand. Par suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

b) On a

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{1/n} n^2 t(1 - nt) dt = \int_0^1 u(1 - u) du = \frac{1}{6}$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n) puisque

$$\int_0^1 f_n(t) dt \not\rightarrow \int_0^1 0 dt$$

- c) Pour n assez grand, $\sup_{[a;1]} |f_n(x)| = 0$ donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a; 1]$.

Exercice 24 : [énoncé]

- a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$. Pour $x \in]0; \pi/2]$, $\cos x \in [0; 1[$ donc $f_n(x) \rightarrow 0$.
 b) Directement

$$I_n = \left[-\frac{n}{n+1} \cos^{n+1} x \right]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}$$

donc $I_n \rightarrow 1 \neq \int_0^{\pi/2} 0 \cdot dx$ et il n'y a pas convergence uniforme.

- c) On a

x	0	x_n	$\pi/2$
f_n	0	$f_n(x_n)$	0

avec $x_n = \arccos \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightarrow 0$ et

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{(1 + 1/n)^{(n+1)/2}} \sim \sqrt{\frac{n}{e}} \rightarrow +\infty$$

Soit $[a; b] \subset]0; \pi/2]$. On a $a > 0$ donc à partir d'un certain rang $x_n < a$ et alors $\sup_{[a;b]} |f_n| = f_n(a) \rightarrow 0$ donc il y a convergence uniforme sur $[a; b]$.

Exercice 25 : [énoncé]

- a) En distinguant le cas $x = 0$ du cas général, on obtient que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par $f(x) = x$.
 b) Par étude des variations de $f_n(x) - f(x)$, on obtient qu'il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.
 c) Par un argument de convergence uniforme, on peut échanger limite et intégrale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n} e^{-nx}) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Exercice 26 : [énoncé]

Pour $x \geq 0$, la suite numérique $(f_n(x))$ est une suite homographique. L'équation $r = \frac{x}{2+r}$ possède deux solutions $r_1 = \sqrt{1+x} - 1$ et $r_2 = -\sqrt{1+x} - 1$. Posons

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2}$$

On a

$$g_{n+1}(x) = \frac{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_1}}{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_2}} = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2} \frac{2+r_2}{2+r_1} = \rho g_n(x)$$

avec

$$\rho = \frac{2+r_2}{2+r_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Puisque $|\rho| < 1$, la suite géométrique $(g_n(x))$ converge vers 0. Or après résolution de l'équation

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - r_1}{f_n(x) - r_2}$$

on obtient

$$f_n(x) = \frac{r_1 - g_n(x)r_2}{1 - g_n(x)}$$

et on en déduit que la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $r_1 = \sqrt{1+x} - 1$. Finalement, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f_\infty : x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$.

Puisque les fonctions f_n sont rationnelles de degrés alternativement 0 et 1, la fonction $|f_n - f_\infty|$ ne peut-être bornée sur \mathbb{R}_+ car de limite $+\infty$ en $+\infty$; il n'y a donc pas convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ .

En revanche, on peut montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0; a]$ pour tout $a \geq 0$.

En effet

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1 - g_n(x)} 2\sqrt{1+x}$$

D'une part, la fonction $x \mapsto 2\sqrt{1+x}$ est bornée sur $[0; a]$.

D'autre part,

$$g_n(x) = \left[\frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right]^n g_0(x)$$

Sur $[0; a]$, la fonction

$$x \mapsto \left| \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right|$$

admet un maximum de valeur < 1 et puisque la fonction continue g_0 est bornée sur $[0; a]$, on peut montrer que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0; a]$.

La relation

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1 - g_n(x)} 2\sqrt{1+x}$$

permet alors d'établir que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0; a]$.

Exercice 27 : [énoncé]

On remarque que la fonction f est bien définie et même qu'elle prend ses valeurs dans $[0; 1/2]$ plutôt que $[0; 1]$.

On remarque aussi que $f(1-x) = f(x)$. Pour étudier le comportement de la suite $(f_n(a)) = (f^n(a))$, on peut se limiter au cas où $a \in [0; 1/2]$.

Étudier le comportement de la suite des itérés $(f^n(a))$ équivaut à étudier la suite récurrente définie par

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

On observe

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1 - 2u_n) \geq 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

Si $a = 0$, cette suite est en fait constante.

Si $a > 0$ cette suite converge vers une limite ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$. Après résolution de cette équation, on obtient que cette limite ne peut qu'être $1/2$.

On peut alors affirmer qu'il y a convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction

$$f: x \mapsto \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

Par non continuité, il y a non convergence uniforme sur $[0; 1]$.

En revanche la croissance de f sur $[0; 1/2]$ permet d'assurer que

$$\forall a \in]0; 1/2], \forall x \in [a; 1/2], f_n(x) \geq f_n(a)$$

ce qui permet de justifier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[a; 1-a]$ pour tout $a \in]0; 1/2]$.

Exercice 28 : [énoncé]

a) On vérifie sans peine que la suite (f_n) est bien définie.

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}, \dots$$

Si $f(x) = \alpha x^\beta$ alors

$$\Phi(f)(x) = \sqrt{\alpha} \int_0^x t^{\beta/2} dt = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2} x^{\beta/2+1}$$

Ainsi $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ avec

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n+2} \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2} + 1$$

On a

$$\beta_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \rightarrow 2$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

On a

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_{n+1}}}{4 - \frac{1}{2^n}} - \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

Or $2^n \geq 2^{n-1}$ donne

$$\frac{2}{4 - \frac{1}{2^n}} \leq \frac{2}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

donc

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leq \frac{2}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}} (\sqrt{\alpha_{n+1}} - \sqrt{\alpha_n})$$

Puisque $\alpha_1 = \alpha_0$, on obtient alors par récurrence que la suite (α_n) est décroissante.

Étant aussi minorée par 0, elle converge et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient

$$\alpha_n \rightarrow 1/4$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f: x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

De plus

$$f_n(x) - f(x) = \alpha_n (x^{\beta_n} - x^2) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right) x^2$$

Puisque $\beta_n \leq 2$, on a pour tout $x \in [0; 1]$ et en exploitant $e^u \leq 1 + u$

$$0 \leq x^{\beta_n} - x^2 = \int_{\beta_n}^2 |\ln(x)| x^t dt \leq (2 - \beta_n) |\ln(x)| \cdot x^{\beta_n} \leq (2 - \beta_n) |\ln(x)| x$$

Puisque la fonction $x \mapsto x |\ln x|$ est bornée par $1/e$ sur $[0; 1]$,

$$0 \leq x^{\beta_n} - x^2 \leq 2 - \beta_n$$

et ainsi

$$|f_n(x) - f(x)| = \alpha_n(2 - \beta_n) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)$$

et ce majorant uniforme tend vers 0.

Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f .

b) La relation

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt$$

donne à la limite

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

d'où l'on tire f dérivable et $f'(x) = \sqrt{f(x)}$.

Pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$, il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction $y: x \mapsto (x/2)^2$ est justement solution.

Exercice 29 : [énoncé]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \rightarrow x$ et

$$|f_n(x) - x| = 1/n \rightarrow 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction identité.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)^2 \rightarrow x^2$ et

$$f_n(n)^2 - n^2 = 2 + 1/n^2 \rightarrow 2$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n^2) .

Exercice 30 : [énoncé]

Par opérations, les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 car $\sqrt{\cdot}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . La suite (f_n) converge simplement vers f avec $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.

En multipliant par la quantité conjuguée :

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}}$$

Par suite $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ puis $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$.

Ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 31 : [énoncé]

Par la formule de Taylor Lagrange :

$$\left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) - \frac{1}{n} f'(x) \right| \leq \frac{M}{n^2}$$

avec $M = \sup |f''|$.

Par suite

$$|g_n(x) - f'(x)| \leq \frac{M}{n}$$

et donc

$$\|g_n(x) - f'(x)\|_{\infty, \mathbb{R}} \rightarrow 0$$

Exercice 32 : [énoncé]

On a

$$\forall x \in [0; 1], f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0)$$

donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n(0), -f_n(1)) \leq \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|) \leq |f_n(0)| + |f_n(1)| \rightarrow 0$$

Exercice 33 : [énoncé]

a) f_n est positive car

$$f_n(x) \geq \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(x) = 0$$

Puisque $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, en passant à la borne supérieure, on obtient

$$\|f_{n+1}\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty.$$

La suite $\|f_n\|_\infty$ est décroissante et minorée donc convergente.

b) $|f_n| = f_n$ étant continue sur un segment, elle y admet un maximum en un certain x_n .

c) La propriété $f_n(x_n) \leq f_p(x_n)$ provient de la décroissance de la suite $(f_p(x_n))_{p \in \mathbb{N}}$.
La suite (x_n) étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de limite \bar{x} .

Comme

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leq f_p(x_{\varphi(n)})$$

on a la limite quand $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} \leq f_p(\bar{x})$$

En passant cette relation à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} \leq 0$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} = 0$$

Exercice 34 : [énoncé]

Notons f la limite simple de la suite (f_n) . Cette fonction f est évidemment convexe.

Par l'absurde, supposons la convergence non uniforme sur un segment $[a; b]$ inclus dans I .

Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite (x_n) d'éléments de $[a; b]$ tels que

$$|f_n(x_n) - f(x)| \geq 2\varepsilon \text{ pour tout naturel } n.$$

Par compacité, on peut extraire de (x_n) une suite convergente et, quitte à supprimer certaines des fonctions f_n , on peut supposer que (x_n) converge. Posons x_{∞} sa limite.

Soit $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha; b + \alpha] \subset I$ (ce qui est possible car l'intervalle I est ouvert).

Pour tout fonction convexe φ , la croissance des pentes donne :

$$\forall x \neq y \in [a; b], \frac{\varphi(a) - \varphi(a - \alpha)}{\alpha} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(b + \alpha) - \varphi(b)}{\alpha} \quad (*)$$

Par convergence simple, $f_n(x_{\infty}) \rightarrow f(x_{\infty})$.

Pour n assez grand, $|f_n(x_{\infty}) - f(x_{\infty})| \leq \varepsilon$ donc

$$|f_n(x_n) - f_n(x_{\infty}) + f(x_{\infty}) - f(x_n)| \geq \varepsilon$$

puis

$$\left| \frac{f_n(x_n) - f_n(x_{\infty})}{x_n - x_{\infty}} + \frac{f(x_{\infty}) - f(x_n)}{x_{\infty} - x_n} \right| \geq \frac{\varepsilon}{x_{\infty} - x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Or la suite $\left(\frac{f(x_{\infty}) - f(x_n)}{x_{\infty} - x_n} \right)$ est bornée en vertu de (*) et la suite $\left(\frac{f_n(x_n) - f_n(x_{\infty})}{x_n - x_{\infty}} \right)$ aussi puis

$$\frac{f_n(a) - f_n(a - \alpha)}{\alpha} \leq \frac{f_n(x_n) - f_n(x_{\infty})}{x_n - x_{\infty}} \leq \frac{f_n(b + \alpha) - f_n(b)}{\alpha}$$

et les termes encadrant convergent.

On obtient ainsi une absurdité.

Exercice 35 : [énoncé]

Si $|\omega| > 1$ alors

$$\frac{1}{z - \omega} = -\frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\omega^n}$$

et la convergence normale sur U de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers

$$z \mapsto \frac{1}{z - \omega}$$

Si $|\omega| < 1$, on peut remarquer que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{e^{i\theta} - \omega} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n \int_0^{2\pi} e^{-i(n+k+1)\theta} d\theta = 0$$

Si $z \mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur U vers $z \mapsto \frac{1}{z - \omega}$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{\overline{P_n(e^{i\theta})}}{P_n(e^{i\theta})} \frac{1}{e^{i\theta} - \omega} d\theta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - \omega|^2} \neq 0$$

Or par le calcul précédent, on peut affirmer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\overline{P_n(e^{i\theta})}}{P_n(e^{i\theta})} \frac{1}{e^{i\theta} - \omega} d\theta = 0$$

On conclut à une absurdité.

La condition cherchée est $|\omega| > 1$.

Exercice 36 : [énoncé]

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n(t) = \frac{f(t + 1/n) - f(t)}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(t)$$

La suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f' sur \mathbb{R} .

Soient $[a; b] \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. La fonction f' est continue sur le compact $[a; b + 1]$ dont uniformément continue. Il existe alors $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (s, t) \in [a; b + 1]^2, |s - t| \leq \alpha \implies |f'(s) - f'(t)| \leq \varepsilon$$

Pour n assez grand de sorte que $1/n \leq \alpha$ et $t \in [a; b]$. On peut écrire

$$n(f(t + 1/n) - f(t)) - f'(t) = n \int_t^{t+1/n} f'(s) - f'(t) ds$$

et donc

$$|u_n(t) - f'(t)| \leq n \int_t^{t+1/n} |f'(s) - f'(t)| dt \leq \varepsilon$$

Ainsi, la convergence de $(u_n)_{n \geq 1}$ est uniforme sur tout segment de \mathbb{R} .

Exercice 37 : [énoncé]

a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0 : u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$ donc

$$0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x.$$

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) dt$$

or $u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \geq 0$ donc $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geq 0$ et

$$u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \leq \frac{(t - t^2)^{n+1}}{(n + 1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n + 1)!}$$

puis

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \frac{x^{n+2}}{(n + 2)!}$$

Récurrence établie.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique

$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$

et donc convergence de la suite $(u_n(x))$.

c) Pour tout $x \in [0; 1]$,

$$|u(x) - u_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x)) \right|$$

donc

$$|u(x) - u_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi (u_n) converge uniformément vers u . On en déduit que u est continue et, toujours par convergence uniforme

$$\forall x \in [0; 1], \int_0^x u_n(t - t^2) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^x u(t - t^2) dt$$

Par conséquent

$$\forall x \in [0; 1], u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt$$

La fonction est donc une fonction non nulle (car $u(0) = 1$) et dérivable avec

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

Exercice 38 : [énoncé]

a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0 : u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$ donc

$$0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x$$

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t) dt$$

Par hypothèse de récurrence, on a pour tout $t \in [0; x]$

$$0 \leq u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t) \leq \frac{(\gamma t)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis en intégrant

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Récurrence établie.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique

$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$

et donc convergence de la suite $(u_n(x))$.

c) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in [0; a]$,

$$|u(x) - u_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x)) \right|$$

donc

$$|u(x) - u_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi (u_n) converge uniformément vers u sur $[0; a]$. On en déduit que u est continue et, toujours par convergence uniforme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x u_n(\gamma t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^x u(\gamma t) dt$$

Par conséquent

$$\forall x \in [0; 1], u(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t) dt$$

La fonction est donc une fonction non nulle (car $u(0) = 1$) et dérivable avec

$$u'(x) = u(\gamma x)$$

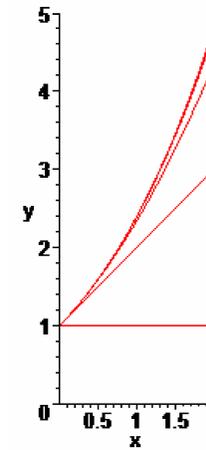


FIGURE 2 – Les premiers éléments de la suite quand $\gamma = 2/3$

Exercice 39 : [énoncé](#)

a) Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sont de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ vers S .

Soi $a > 0$. Sur $[a; +\infty[$,

$$\|f'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{(n+a)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$$

donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $[a; +\infty[$.

Par théorème, S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leq 0$ et la fonction S est décroissante.

c)

$$S(x+1) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x}$$

d) Quand $x \rightarrow 0$, $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$ et $S(x+1) \rightarrow S(1)$ donc

$$S(x) \sim \frac{1}{x}$$

e) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{2}(S(x) + S(x+1)) \leq S(x) \leq \frac{1}{2}(S(x) + S(x-1))$$

avec $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x-1}$ donne

$$S(x) \sim \frac{1}{2x}$$

Exercice 40 : [énoncé]

Posons $u_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

a) Par le critère spécial, $\sum u_n(x)$ converge pour chaque $x > 0$.
Il y a convergence simple de la série de fonctions définissant F .

b) Les fonctions u_n sont de classe \mathcal{C}^1 et pour $n \geq 1$

$$u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

On a

$$\|u'_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$$

Il y a convergence normale $\sum u'_n$ pour $n \geq 1$.

Il y a donc convergence uniforme de $\sum u'_n$ (pour $n \geq 0$) et l'on peut donc conclure que F est de classe \mathcal{C}^1 .

De la même manière, on obtient F de classe \mathcal{C}^∞ .

c) Par décalage d'indice

$$F(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

et donc

$$F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$$

d) Posons

$$G(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

L'intégrale est bien définie pour $x > 0$ et l'on remarque

$$G(x) + G(x+1) = \frac{1}{x}$$

Posons $H = F - G$. La fonction H est 2-périodique, montrons qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.

Par application du critère spécial, on a

$$\forall x > 0, F(x) \geq 0$$

donc

$$0 \leq F(x) \leq F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et par encadrement F tend vers 0 en $+\infty$.

Le même raisonnement se transpose à G .

On peut conclure que H tend vers 0 en $+\infty$ puis finalement H est nulle.

e) Quand $x \rightarrow 0$, $F(x+1) \rightarrow F(1)$ par continuité et donc

$$F(x) = \frac{1}{x} - F(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

On vérifie aisément que F est décroissante et puisque

$$\frac{1}{x} = F(x) + F(x+1) \leq 2F(x) \leq F(x) + F(x-1) = \frac{1}{x-1}$$

on obtient

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

Exercice 41 : [énoncé]

a) $f_n : x \mapsto \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)}$, f_n est continue sur $]0; +\infty[$.

Soit $a > 0$. Sur $[a; +\infty[$,

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{a n!}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$. Par théorème, la somme S de la série $\sum f_n$ est continue sur $]0; +\infty[$.

b)

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+1+k)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} S(x+1)$$

c) Par converge uniformément sur $[a; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} S(x+1) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$$

Quand $x \rightarrow 0$,

$$S(x+1) \rightarrow S(1)$$

par continuité et

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = e - 1$$

donc

$$S(x) = \frac{1 + S(x+1)}{x} \sim \frac{e}{x}$$

Exercice 42 : [énoncé]

a) Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire $f_n(x) = x(\text{th})'(c)$ avec $c \in]n; x+n[$. Puisque $(\text{th})'(c) = \frac{1}{\text{ch}^2(c)}$, on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{x}{\text{ch}^2(n)} \sim \frac{4x}{e^{2n}}$$

Par suite $n^2 f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement.

b) Pour $a \in \mathbb{R}_+$, l'étude qui précède donne

$$\|f_n\|_{\infty, [0; a]} \leq \frac{a}{\text{ch}^2(n)}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0; a]$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonction continue, on peut affirmer que S est continue. De plus, les fonctions sommées étant toutes strictement croissantes, la somme S l'est aussi.

En effet, pour $x < y$,

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) < \sum_{k=1}^n f_k(y)$$

donne à la limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)$$

et puisque $f_0(x) < f_0(y)$, on parvient à

$$S(x) < S(y)$$

c)

$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{th}(x+1+n) - \text{th}(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{th}(x+1+n) - \text{th}(n+1)) + \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{th}(n+1) - \text{th}(n))$$

avec convergence des deux séries introduites.

Par décalage d'indice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\text{th}(x+1+n) - \text{th}(n+1)) = S(x) - \text{th } x$$

et par étude la limite des sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\text{th}(n+1) - \text{th } n) = 1$$

On conclut à la relation proposée.

d) S admet une limite en $+\infty$ car c 'est une fonction monotone. Pour déterminer celle-ci, étudions la limite de la suite $(S(n))$. La nature de la suite $S(n)$ est celle de la série de terme général

$$S(n+1) - S(n) = 1 - \text{th } n$$

Or

$$1 - \text{th } n = \frac{\text{ch } n - \text{sh } n}{\text{ch } n} = \frac{e^{-n}}{\text{ch } n} \sim \frac{1}{2e^{-2n}}$$

est terme général d'une série absolument convergente.

On en déduit que la suite $(S(n))$ converge et donc que la fonction S converge.

Exercice 43 : [énoncé]

Puisque la fonction f est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$. Puisque la fonction f est aussi intégrable cette limite est nécessairement nulle. En particulier, la fonction f est positive.

Par télescopage, on observe

$$g(x + N) - g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x + k)$$

et s'il l'on s'adjoint la contrainte d'une limite nulle à g en $+\infty$, on est tenté de poser

$$g(x) = - \sum_{k=0}^{+\infty} f(x + k)$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien définie et continue ce qui sera obtenu par un argument de convergence normale. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a pour $k \geq 1$

$$0 \leq f(x + k) \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x + k)| \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

Par intégrabilité de f , il y a convergence de la série

$$\sum \int_{k-1}^k f(t) dt$$

et donc convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k \geq 1} f(x + k)$$

L'adjonction du terme d'indice $k = 0$ ne change rien et l'on peut conclure.

On vient ainsi de trouver une solution au problème posé, d'autres solutions s'en déduisent par ajout d'une constante.

Exercice 44 : [énoncé]

a) $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$$

$\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ vers S .

$$\forall a > 0, \|f'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ converge}$$

donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$. Par théorème S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$$

Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leq 0$ et S est décroissante.

c)

$$xS(x) - S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

d)

$$xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1) \text{ et } S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{e}$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $xS(x) \rightarrow 1$ d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{x}$$

e) Par le critère spécial des séries alternées,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!(x+1+n)} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

Par converge uniformément sur $]0; +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1) \rightarrow \frac{1}{e}$$

d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{ex}$$

Exercice 45 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où l'existence de la somme.

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+k}$$

Or

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{x+1+k} = \sum_{k=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+k}$$

donc à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient $f(x+1) = f(x)$.

$$\sum_{k=-N}^N \frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \sum_{k=-N}^N \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} = 2 \sum_{k=-2N+1}^{2N+1} \frac{1}{x+k}$$

donne à la limite

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

Exercice 46 : [\[énoncé\]](#)

- a) La série de fonctions considérée converge uniformément sur tout segment inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sa somme est donc continue et de plus 1-périodique.

- b) Soit $\alpha \geq 1$. Pour tout $x \in [-\alpha; \alpha]$, $x/2$ et $(x+1)/2$ appartiennent à $[-\alpha; \alpha]$. Posons $M_\alpha = \|f\|_{\infty, [-\alpha; \alpha]}$. La relation

$$f(x) = \frac{1}{c} \left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]$$

donne $|f(x)| \leq \frac{2}{c} M_\alpha$ pour tout $x \in [-\alpha; \alpha]$. On en déduit $M_\alpha \leq \frac{2}{c} M_\alpha$ puis $M_\alpha = 0$ puisque $c > 2$.

Ainsi f est nulle sur $[-\alpha; \alpha]$ et puisque ceci vaut pour tout $\alpha \geq 1$, f est la fonction nulle.

- c) Posons $h: x \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

La fonction $g = f - h$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, 1-périodique et continue.

On peut écrire $f(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{f}(x)$ avec

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right)$$

Par convergence uniforme sur $[-1/2; 1/2]$, la fonction \tilde{f} est continue en 0.

On peut aussi écrire $h(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{h}(x)$ avec \tilde{h} continue en 0.

La fonction $g = f - h$ se prolonge donc par continuité en 0.

Par périodicité, g se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R} .

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on remarque que

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$$

et

$$h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4h(x)$$

On en déduit

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g(x)$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mais aussi pour $x \in \mathbb{Z}$ par continuité.

En vertu de b), on peut affirmer $g = 0$ et donc $f = h$.

Exercice 47 : [\[énoncé\]](#)

Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.

Soit f une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer $f(0) = 0$.

On a

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

donc

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^{n+1})}{2^n}$$

Posons $h(x) = \sup_{[0;x]} |f|$.

Pour $x > 0$, on a $x^{n+1} \in [0; x^2]$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} h(x^2) = h(x^2)$$

Ainsi $h(x) \leq h(x^2)$ puis en itérant $0 \leq h(x) \leq h(x^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or pour $x \in [0; 1[$, $x^{2^n} \rightarrow 0$ et $\lim_{0^+} h = 0$ (car $f(0) = 0$) donc $h(x) = 0$ sur $[0; 1[$.

Finalement f est nulle sur $[0; 1[$ puis en 1 par continuité.

Exercice 48 : [\[énoncé\]](#)

a) Analyse : supposons f solution.

Pour $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - f(x+1) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + f(x+2)$$

puis par récurrence

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + (-1)^{n+1} f(x+n+1)$$

Sachant que f est de limite nulle en $+\infty$, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$$

Synthèse : on vérifie aisément la convergence de la série de fonctions définissant f par application du critère spécial.

De plus

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

assure que f est de limite nulle à l'infini.

Enfin

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n+1)^2} = \frac{1}{x^2}$$

b) On vérifie la convergence normale de la série de fonctions définie f sur $[a; +\infty[$ par

$$\left| \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} \right| \leq \frac{1}{(a+n)^2}$$

Les fonctions sommées étant continues, la fonction f est continue sur $]0; +\infty[$. Elle est aussi intégrable en vertu de l'encadrement

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

c) On ne peut directement appliquer de théorèmes d'intégration terme à terme, on raisonne alors par les sommes partielles

$$\int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(t+n)^2} dt = \sum_{n=0}^N (-1)^n \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+n)^2} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Or

$$\left| \int_1^{+\infty} f(t) dt - \int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(t+n)^2} dt \right| = \left| \int_1^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(t+n)^2} dt \right|$$

et par application du critère spécial

$$\left| \int_1^{+\infty} f(t) dt - \int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(t+n)^2} dt \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+N+1)^2} = \frac{1}{(N+2)}$$

En passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Exercice 49 : [\[énoncé\]](#)

- a) Si f est constante égale à C alors l'équation (E) est vérifiée si, et seulement si, $C = 2C - 2C^2$. Cette dernière équation est vérifiée pour $C = 0$ et $C = 1/2$ seulement.
- b) Après substitution et étude séparée du cas $x = 0$, on obtient f solution de (E) si, et seulement si, h vérifie

$$h(2x) = h(x) - xh(x)^2$$

- c) L'application T_x est de classe \mathcal{C}^1 et $T'_x(y) = 1 - xy$. Sur $[0; 1]$, on vérifie $|T'_x(y)| \leq 1$ et la fonction T_x est donc 1-lipschitzienne sur $[0; 1]$. Au surplus, la fonction T_x est croissante sur $[0; 1]$ avec $T_x(0) = 0$ et $T_x(1) = 1 - x/2$. On en déduit $T_x([0; 1]) \subset [0; 1]$.

Par une récurrence immédiate, on vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], h_n(x) \in [0; 1]$$

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0; 1]$, on a par lipschitzianité

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right|$$

En répétant cette majoration

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| = \frac{x}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

La série télescopique $\sum h_{n+1}(x) - h_n(x)$ converge donc absolument et la suite $(h_n(x))$ est donc convergente. La suite de fonctions (h_n) converge donc simplement vers une fonction h . Au surplus

$$|h(x) - h_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La convergence de la suite (h_n) est donc uniforme sur $[0; 1]$.

- d) La fonction h est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue sur $[0; 1]$. En passant à la limite la relation

$$\forall x \in [0; 1], h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

on obtient l'identité

$$\forall x \in [0; 1], h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Puisque $h_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h(0) = 1$ et la fonction h n'est pas nulle. On peut alors définir la fonction $f: x \mapsto xh(x)$ qui est continue, non constante et vérifie

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

- e) On peut ensuite définir une solution sur $[0; 2]$ en posant

$$\forall x \in]1; 2], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Cette solution est bien continue en 1 car

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1)$$

De même, on prolonge la solution sur $[0; 4]$, $[0; 8]$, etc.

Exercice 50 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq 1/n^2$$

Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur \mathbb{R} .

Exercice 51 : [\[énoncé\]](#)

On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur \mathbb{R} et

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+1+x^2} \leq \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$. Il y a donc convergence uniforme sur \mathbb{R} .

Exercice 52 : [\[énoncé\]](#)

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, introduisons $k = \lfloor x \rfloor$. Pour $N \geq k + 1$, on a

$$\sum_{n=0}^N u_n(x) = \frac{1}{k+1}$$

et donc la série de fonctions converge simplement sur $[0; +\infty[$ vers S avec

$$S(x) = \frac{1}{k+1} \text{ pour } x \in [k; k+1[$$

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a

$$S(x) - \sum_{n=0}^N u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < N+1 \\ S(x) & \text{si } x \geq N+1 \end{cases}$$

et donc

$$\left| S(x) - \sum_{n=0}^N u_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Il y a donc convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Enfin $\|u_n\|_\infty = 1/(n+1)$ n'est pas sommable, il n'y a pas convergence normale.

Exercice 53 : [énoncé]

Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ est sommable.

Pour $x \neq 0$, $n^2 f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée et donc la série numérique

$\sum f_n(x)$ converge.

On peut donc affirmer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

L'étude des variations des fonctions f_n donne

$$\|f_n\|_\infty = f_n(2\sqrt{n}) = \frac{4}{e^2}$$

Il n'y a donc pas convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur \mathbb{R}_+ .

En revanche, pour $a > 0$ et n assez grand de sorte que $2\sqrt{n} \leq a$, on a

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = f_n(a)$$

et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ car la série numérique $\sum f_n(a)$ converge.

A fortiori, il y a aussi convergence uniforme de $\sum f_n$ sur chaque $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Montrons qu'il n'y a cependant pas convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Par l'absurde, s'il y avait convergence uniforme sur $[0; +\infty[$, la fonction somme de la série $\sum f_n$ serait continue car chaque f_n est continue. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par positivité des fonctions sommées

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) \geq f_N\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) = \frac{4}{e^2}$$

et donc la fonction somme ne tend pas vers 0 en 0.

Ceci contredit sa continuité.

Exercice 54 : [énoncé]

a) Par croissance comparée, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} (n-x) e^{-x}$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n et affirmer

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n}$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} et sa somme est égale à 1.

Il ne peut y avoir convergence normale sur $[a; +\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.

En revanche sur $[0; a]$, il y a convergence normale car pour n assez grand de sorte que $n \geq a$, on a

$$\sup_{x \in [0; a]} |f_n(x)| = f_n(a)$$

Il y a aussi a fortiori convergence uniforme sur $[0; a]$.

Par l'absurde, s'il y avait convergence uniforme sur une voisinage de $+\infty$, on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité $1 = 0$.

Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Exercice 55 : [\[énoncé\]](#)

Si $x = 1$ alors $u_n(x) = 0 \rightarrow 0$. Si $x \in]0; 1]$ alors $u_n(x) \rightarrow 0$. La suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle.

$$u'_n(x) = n^\alpha x^n - n^{\alpha+1} x^{n-1} (1-x) = n^\alpha x^{n-1} (n - (n+1)x).$$

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^\alpha \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n+1})} = e^{-1+o(1)} \rightarrow 1/e$ donc

$$\|u_n\|_\infty \sim n^{\alpha-1}/e$$

Il y a convergence uniforme sur $[0; 1]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $\sum u_n(x)$ converge, $\|u_n\|_\infty \sim en^{\alpha-1}$, il y a donc convergence normale sur $[0; 1]$ si, et seulement si, $\alpha < 0$.

Pour $\alpha \geq 0$, $u_n(x) \geq x^n(1-x) = v_n(x)$.

Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \rightarrow \frac{1}{e}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(1)$$

La série $\sum v_n$ ne converge donc pas uniformément vers $[0; 1]$ et par suite $\sum u_n$ non plus.

Enfin pour $a < 1$, on a $\|u_n\|_{\infty, [0; a]} = u_n(a)$ et donc (u_n) converge uniformément sur $[0; a]$ et $\sum u_n$ converge normalement sur $[0; a]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 56 : [\[énoncé\]](#)

a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Puisque les fonctions f_n sont continues, pour qu'il y ait convergence uniforme, il est nécessaire que la fonction limite soit continue et donc que $f(1) = 0$.

Inversement, supposons $f(1) = 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [0; 1], |x - 1| \leq \alpha \implies |f(x)| \leq \varepsilon$$

Sur $[0; 1 - \alpha]$, $|f_n(x)| \leq (1 - \alpha)^n \|f\|_\infty$ et sur $[1 - \alpha; 1]$, $|f_n(x)| \leq |f(x)| \leq \varepsilon$.
Puisque $(1 - \alpha)^n \rightarrow 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, (1 - \alpha)^n \|f\|_\infty \leq \varepsilon$$

On a alors pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [0; 1]$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ donc $\|f_n\|_\infty \leq \varepsilon$.

Ainsi $f_n \xrightarrow{CVU} \tilde{0}$.

b) Supposons que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

Puisqu'il n'y a pas divergence grossière, on a $f_n(1) \rightarrow 0$ et donc $f(1) = 0$.

Notons S la somme sur $[0; 1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

Pour $x \in [0; 1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n f(x) = \frac{f(x)}{1-x}$$

et

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(1) = 0$$

Or la fonction S est continue comme somme uniformément convergente d'une série de fonctions continues.

Par suite $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 0$ ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$$

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

Inversement, supposons $f(1) = 0$, f dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

Posons (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$.

Pour $x \neq 1$,

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} f(x)$$

Posons $g: x \in [0; 1[\mapsto \frac{f(x)}{1-x}$ prolongée par continuité en 1 par la valeur $g(1) = 0$.

La fonction g est continue sur $[0; 1]$ et $g(1) = 0$ donc la suite (g_n) définie par $g_n: x \mapsto x^n g(x)$ converge uniformément vers $\tilde{0}$ sur $[0; 1]$. Or

$S_n(x) = g(x) - g_{n+1}(x)$ donc $S_n \xrightarrow[0;1]{CVU} g$ et la série $\sum f_n$ converge

uniformément.

Exercice 57 : [\[énoncé\]](#)

a) Pour $x = 1$, $u_n(x) = 0$ et la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.
 Pour $x \in [0; 1[$, on peut écrire $0 \leq u_n(x) \leq a_0 x^n (1-x) = \lambda x^n$. Or il y a convergence de la série numérique $\sum x^n$ et donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n(x)$ converge.

b) Après étude de fonction, on obtient

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |u_n(x)| = \frac{a_n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{a_n}{en}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la convergence normale de $\sum u_n$ équivaut à la convergence de $\sum a_n/n$.

c) Considérons le reste

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x)$$

Par la décroissance de la suite (a_n)

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x)$$

Ainsi, pour $x \in [0; 1[$ ou $x = 1$, on obtient

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1}$$

Par cette majoration uniforme, on peut affirmer que, si (a_n) tend vers 0, alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément.

Inversement, supposons la série $\sum u_n$ uniformément convergente.

La suite (a_n) étant décroissante et positive, elle admet nécessairement une limite $\ell \geq 0$. On a alors

$$\forall x \in [0; 1[, R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ell x^k (1-x) = \ell x^{n+1} \geq 0$$

On obtient donc

$$\forall x \in [0; 1[, \ell x^{n+1} \leq \|R_n\|_\infty$$

En faisant $x \rightarrow 1^-$,

$$\ell \leq \|R_n\|_\infty$$

et ceci valant pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut $\ell = 0$

Exercice 58 : [énoncé]

Remarquons que pour tout $t \in [0; 1]$,

$$t - t^2 \in [0; 1/4]$$

Pour $x \in [0; 1/4]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leq x \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4} \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]}$$

Par une récurrence facile donc aisément

$$\|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4^n}$$

Par la remarque initiale, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leq \|u_n\|_{\infty, [0; 1/4]} \leq \frac{1}{4^n}$$

donc

$$\|u_{n+1}\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{4^n}$$

On peut conclure que la série $\sum u_n$ est normalement convergente.

Exercice 59 : [énoncé]

La fonction u_n est dérivable avec

$$u'_n(x) = \frac{1 - n^2 x}{(1 + n^2 x)^3}$$

Les variations de u_n sur $[0; +\infty[$ fournissent

$$\|u_n\|_\infty = u_n(1/n^2) = \frac{1}{4n^2}$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0; +\infty[$, *a fortiori* uniformément et simplement.

Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$,

$$|u'_n(x)| \leq \frac{1 + n^2 x}{(1 + n^2 x)^3} = \frac{1}{(1 + n^2 a)^2} \sim \frac{1}{a^2} \frac{1}{n^4}$$

La série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

En revanche, il n'y a pas convergence en 0, ni convergence uniforme sur $]0; a]$ car le théorème de la double limite ne peut s'appliquer en 0.

Exercice 60 : [énoncé]

a) ζ est bien définie sur $]1; +\infty[$. Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1; +\infty[$ et

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$$

Pour tout $a > 1$ sur $[a; +\infty[$,

$$\left| f_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{(\ln n)^p}{n^a}$$

donc

$$\left\| f_n^{(p)} \right\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{(\ln n)^p}{n^a}$$

Pour $\rho \in]1; a[$,

$$n^\rho \left\| f_n^{(p)} \right\|_{\infty, [a; +\infty[} \rightarrow 0$$

donc $\sum \left\| f_n^{(p)} \right\|_{\infty, [a; +\infty[}$ converge puis $\sum f_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

Il en découle que la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge simplement sur $]1; +\infty[$ et $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1; +\infty[$. Par théorème on peut conclure ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1; +\infty[$.

b)

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)}{n^x} \leq 0$$

donc ζ est décroissante.

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0$$

donc ζ est convexe.

c) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[2; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon. Par le théorème de la double limite

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

d) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$$

En sommant, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$$

On en déduit

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

e) Le signe de $\ln(\zeta(x))''$ est celui de

$$\zeta(x)\zeta''(x) - \zeta'(x)^2$$

Or

$$\sum_{n=1}^N \frac{-\ln n}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{x/2}} \frac{-\ln n}{n^{x/2}}$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{-\ln n}{n^x} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \sum_{n=1}^N \frac{(\ln n)^2}{n^x}$$

puis quand $N \rightarrow +\infty$,

$$\zeta'(x)^2 \leq \zeta(x)\zeta''(x)$$

Exercice 61 : [énoncé]

a) Posons $u_n(x) = 1/n^x$ définie sur $]1; +\infty[$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1; +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\zeta(x)$.

Plus précisément, pour $a > 1$, on a

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) \text{ avec } \sum u_n(a) \text{ convergente}$$

et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions u_n sur $[a; +\infty[$.

Puisque

$$u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que ζ tend en $+\infty$ vers la somme convergente des limites

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

b) Posons $v_n(x) = \zeta(n)x^n/n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left| \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$ (en fait le rayon de convergence de cette série entière vaut 1). Pour $x = 1$, il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}$$

Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $((-1)^n \zeta(n)/n)$ est alternée et décroît en valeur absolue vers 0 notamment car $\zeta(n+1) \leq \zeta(n)$.

c) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, la fonction F est assurément de classe \mathcal{C}^1 (et même \mathcal{C}^∞) sur $] -1; 1[$.

Les fonctions v_n sont continues sur $[-1; 0]$ et l'on vérifie que la série $\sum v_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout $x \in [-1; 0]$. On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \right| \leq |v_{n+1}(x)| \leq \frac{\zeta(n)}{n}$$

Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $[-1; 0]$ et sa somme F est donc continue.

d) Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour $x \in] -1; 1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p \geq 1} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right| \text{ et } \sum_{n \geq 1} \sum_{p=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n}{p^{n+1}} \right|$$

On en déduit après sommation géométrique

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{p} \right)$$

La série de fonction associée converge normalement sur tout segment de $] -1; 1[$ et on peut donc intégrer terme à terme

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \int_0^x F'(t) dt = \int_0^x \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-t} - \frac{1}{p} \right) dt \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{1}{p-t} - \frac{1}{p} dt = \sum_{p=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{p}{p-x} \right) - \frac{x}{p} \end{aligned}$$

Exercice 62 : [énoncé]

Chaque $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$f'_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n^x}$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers ζ_2 sur $]0; +\infty[$.

La suite $(f'_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée. Étudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}}$$

Pour $\ln t \geq 1/x$, $\varphi'(t) \leq 0$ donc φ décroissante sur $[e^{1/x}; +\infty[$. Ainsi $(f'_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang $\lfloor e^{1/x} \rfloor + 1$ et tend vers 0. On peut appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geq \lfloor e^{1/a} \rfloor + 1$ on a pour tout $x \in [a; +\infty[$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \rightarrow 0$$

$\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$.

On peut alors conclure que la fonction ζ_2 est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Exercice 63 : [énoncé]

Par le critère spécial des séries alternées, ζ_2 est bien définie sur $]0; +\infty[$.

$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$ et

$$f_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p} \frac{(\ln n)^p}{n^x}$$

La suite $(f_n^{(p)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée. Étudions

$$\varphi : t \mapsto \frac{(\ln t)^p}{t^x}$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{\ln(t)^{p-1}(p - x \ln t)}{t^{x+1}}$$

Pour $\ln t \geq p/x$, $\varphi'(t) \leq 0$ donc φ décroissante sur $[e^{p/x}; +\infty[$. Ainsi $(f_n^{(p)}(x))_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang $E(e^{p/x}) + 1$ et tend vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geq E(e^{p/a}) + 1$ on a pour tout $x \in [a; +\infty[$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p}(\ln k)^p}{k^x} \right| \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^x} \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a} \rightarrow 0$$

$\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$ (pour tout $a > 0$) donc converge simplement sur $]0; +\infty[$ et converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$. Par théorème on peut alors conclure que ζ_2 est \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 64 : [énoncé]

La convergence pour $x > 0$ de la série définissant $\zeta_2(x)$ est acquise par le critère spécial des séries alternées.

On peut combiner les termes d'indices impairs avec les termes d'indices pairs qui suivent

$$\zeta_2(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2p-1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \right)$$

Considérons alors la fonction $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{1}{(2t-1)^x} - \frac{1}{(2t)^x}$$

La fonction f est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

puis en sommant ces encadrements

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \zeta_2(x) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t) dt$$

Or

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2(1-x)} \left[(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x} \right]_1^{+\infty}$$

avec

$$(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x} = -(2t)^{1-x} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2t} \right)^{1-x} \right) \sim (x-1)(2t)^{-x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2(1-x)} (2^{1-x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$$

De plus

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2^x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

et donc par encadrement

$$\zeta_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$$

Exercice 65 : [énoncé]

a) ζ est définie sur $]1; +\infty[$ et ζ_2 est définie sur $]0; +\infty[$ (via le critère spécial des séries alternées)

b) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est continue.
Pour tout $a > 1$,

$$\left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^a}$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{n^a}$$

or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1; +\infty[$. Par théorème, on obtient que la fonction ζ est continue.

$g_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est continue.

Par le critère spécial des séries alternées

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^x}$$

Pour tout $a > 0$,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^x} \leq \frac{1}{(N+1)^a}$$

donc $\sum g_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$. Par théorème on obtient que la fonction ζ_2 est continue sur $]0; +\infty[$.

c) Pour $x > 1$

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^x} = \zeta(x) - 2^{1-x} \zeta(x)$$

Exercice 66 : [\[énoncé\]](#)

On peut écrire

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

avec convergence normale sur $[0; 1]$ donc

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} dx$$

Or

$$\int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} dx = \ln \frac{n}{n-1} - \ln \frac{n+1}{n}$$

et en transitant par les sommes partielles

$$\sum_{n=2}^N \int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} dx = \sum_{n=2}^N \ln \frac{n}{n-1} - \sum_{n=2}^N \ln \frac{n+1}{n} = \ln N - \ln(N+1) + \ln 2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln 2$$

est le terme générale d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment $[0; 1]$:

Ainsi

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \ln 2$$

Exercice 67 : [\[énoncé\]](#)

a) Pour $x \in]0; 1[$, on obtient par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$$

Cette relation vaut aussi pour $x = 0$ ou $x = 1$.

b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x \right| \leq x^{2(n+2)} |\ln x|$$

L'étude de $\varphi : x \mapsto x^{2(n+2)} |\ln x|$ donne

$$\forall x \in [0; 1], x^{2(n+2)} |\ln x| \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)} \rightarrow 0$$

c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \ln x dx - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2} dx$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur $[0; 1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.

Exercice 68 : [\[énoncé\]](#)

$$\left\| \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} \right\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{n^2}$$

est le terme générale d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment $[0; 1]$:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} d\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{2\alpha d\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \pi \frac{\text{ch } \pi\alpha}{\text{sh } \pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

donc

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} d\alpha = \left[\ln \frac{\text{sh } \pi\alpha}{\alpha} \right]_0^1 = \ln \frac{\text{sh } \pi}{\pi}$$

On en déduit que

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\text{sh } \pi}{\pi}$$

Exercice 69 : [énoncé]

Pour $x \leq 0$, il y a divergence grossière.

Pour $x > 0$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n} + 2 \ln n} \rightarrow 0$ donc $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Ainsi f est définie sur $]0; +\infty[$.

Pour $a > 0$, sur $[a; +\infty[$, $|e^{-x\sqrt{n}}| \leq e^{-a\sqrt{n}}$. Cela permet d'établir la convergence normale de la série de fonctions sur $[a; +\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que f est continue sur $]0; +\infty[$.

Par convergence uniforme sur $[1; +\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 1$$

Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$$

En sommant (avec $n = 0$ à part pour la majoration) on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{2}{x^2}$$

quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 70 : [énoncé]

Par le critère spécial des séries alternées, il est immédiate de justifier que $S(t)$ est définie pour tout $t > 0$.

On peut réorganiser l'expression de $S(t)$ de la façon suivante :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{2p}}{(2pt+1)} + \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)t+1} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t}{(2pt+1)[(2p+1)t+1]}$$

La fonction $f_t: x \mapsto \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}$ est décroissante.

Par comparaison avec une intégrale, on obtient l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f_t(x) dx \leq S(t) \leq \int_0^{+\infty} f_t(x) dx$$

Puisque par les calculs précédents

$$\frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)} = \frac{1}{2xt+1} - \frac{1}{(2x+1)t+1}$$

On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)} dx = \left[\frac{1}{2t} \ln \frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)} \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(1+t)}{2t}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)} dx = \left[\frac{1}{2t} \ln \frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)} \right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1+3t) - \ln(1+2t)}{2t}$$

Quand $t \rightarrow 0^+$, on obtient par encadrement $S(t) \rightarrow 1/2$.

Exercice 71 : [énoncé]

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

De plus

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \right\|_{\infty} \leq \ln \left(1 + \frac{x^2}{(N+1)(1+x^2)} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{N+1} \right) \rightarrow 0$$

donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

b) $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 1/n)$. Par convergence uniformément

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1 + 1/n)$$

Pour calculer cette somme, manipulons les sommes partielles et séparons les termes d'indice pair de ceux d'indice impair

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^N \ln(2n+1) - \ln(2n) + \sum_{n=1}^N \ln(2n-1) - \ln(2n)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\left(\frac{(2N)!}{(2^N N!)^2}\right)^2 (2N+1)\right)$$

Or

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1 + 1/n) \sim \ln(2/\pi)$$

On en déduit

$$\ell = \ln(2/\pi)$$

Exercice 72 : [énoncé]

En réorganisant la somme

$$u_n = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

avec $f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_k(n) = (1 - k/n)^n \text{ si } k \leq n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $f_k(n) \rightarrow e^{-k}$.

Pour $k \leq n$, $|f_k(n)| = \exp(n \ln(1 - k/n)) \leq \exp(-k)$ et cette majoration vaut aussi pour $k > n$. Ainsi $\|f_k\|_{\infty, \mathbb{N}} \leq e^{-k}$ et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $A = \mathbb{N}$.

Par interversion limite/somme infinie, on obtient

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{1 - 1/e}$$

Exercice 73 : [énoncé]

Posons

$$f_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \text{ pour } k \leq n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$f_k(n) \rightarrow \exp(-k\alpha)$$

Pour $k \leq n$

$$|f_k(n)| = \exp(n\alpha \ln(1 - k/n)) \leq e^{-k\alpha}$$

et cette majoration vaut aussi pour $k > n$.

Ainsi

$$\|f_k\|_{\infty, \mathbb{N}} \leq e^{-k\alpha}$$

et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $A = \mathbb{N}$.

Par interversion limite/somme infinie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\alpha}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}$$

Exercice 74 : [énoncé]

Par la formule du binôme

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k}$$

Considérons $f_k : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \frac{z^k}{x^k} \text{ si } x \geq k \text{ et } f_k(x) = 0 \text{ sinon}$$

En tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k} = \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p$$

La série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$ converge simplement vers $x \rightarrow \left(1 + \frac{z}{x}\right)^x$ en tout

$p \in \mathbb{N}$. De plus, puisque $|f_k(x)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$, la convergence est normale sur \mathbb{R}_+ . Pour k fixé, quand $x \rightarrow +\infty$,

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k} \frac{z^k}{k!} \rightarrow \frac{z^k}{k!}$$

Par le théorème de la double limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

Exercice 75 : [énoncé]

Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2x} \text{ avec } x > 0$$

- a) Soit $x \in]0; +\infty[$. On a $f_n(x) \sim 1/n^2x$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument. On en déduit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et donc la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est bien définie.
- b) Les f_n sont continues sur \mathbb{R}_+^* . Soit $a > 0$,

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{n + n^2a} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0; +\infty[$.

On peut donc conclure que S est continue.

- c) Chaque f_n est décroissante donc la fonction S l'est aussi.
- d) Par convergence normale sur $[1; +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

On remarque

$$xf_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$$

Posons $g_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx)}$. La fonction g_n croît de 0 à $1/n^2$ sur \mathbb{R}_+ donc

$$\|g_n\|_{\infty, [0; +\infty[} = \frac{1}{n^2}$$

La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par suite $xS(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$ puis

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$$

- e) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante donc par comparaison avec une intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right) dt = \left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$$

donc

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$$

Exercice 76 : [énoncé]

- a) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$ est définie et continue sur $] -1; +\infty[$. Soient $-1 < a \leq 0 \leq 1 \leq b$.

$$\|f_n\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{b}{n(n+a)}$$

La série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; b]$ et donc converge uniformément sur tout segment inclus dans $] -1; +\infty[$.

- b) Chaque f_n est croissante donc par sommation de monotonie, S est croissante.
- c)

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

donc

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

- d) Quand $x \rightarrow -1$, $S(x+1) \rightarrow S(0) = 0$ puis

$$S(x) = -\frac{1}{x+1} + S(x+1) \sim -\frac{1}{x+1}$$

e) $S(0) = 0$ et $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

f) On sait $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ et on sait $\ln(n+1) \sim \ln n$.
Puisque $S(E(x)) \leq S(x) \leq S(E(x)+1)$ on obtient

$$S(x) \sim \ln E(x) \sim \ln x$$

Exercice 77 : [énoncé]

a) Posons $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$
Pour $x \leq 0$, la série $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.
Pour $x > 0$, $n^2 f_n(x) \rightarrow 0$ donc $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ converge absolument.
La fonction f est donc définie sur $]0; +\infty[$.
Pour $a > 0$,

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = f_n(a)$$

et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$. Comme somme de série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0; +\infty[$.

b) f est somme de fonction strictement décroissante, elle donc elle-même strictement décroissante.
c) Par convergence uniforme sur $[a; +\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

d) Par monotonie de $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$,

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$$

En sommant

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \sim \frac{2}{x^2}$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

Exercice 78 : [énoncé]

a) Notons : $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.
Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ donc $S(x)$ est bien définie.
Pour $x \in]0; 1[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \sim x < 1$ et $S(x)$ est bien définie.
Pour $x = 1$: $f_n(x) = 1/2$ et $S(x)$ n'est pas définie.
Pour $x \in]1; +\infty[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \rightarrow \frac{1}{x} < 1$ donc $S(x)$ est bien définie.
Finalement S est définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par convergence simple de $\sum f_n$ sur ce domaine.

b)

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, S(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = S(x)$$

c) Soit $0 < a < 1$. Sur $[0; a]$,

$$\|f_n\|_{\infty, [0; a]} \leq a^n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} a^n < 1$$

donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0; a]$ et donc converge uniformément sur tout segment de $[0; 1[$. Par théorème S est continue sur $[0; 1[$.
Par composition de fonctions continues $S : x \mapsto S(1/x)$ est aussi continue sur $]1; +\infty[$.

d)

$$f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - 2nx^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$$

Chaque f_n est croissante sur $[0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.
Par sommation de monotonie, la fonction S est croissante sur $[0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.
 $S(0) = 0$.
Quand $x \rightarrow 1^-$,

$$S(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{2x}{1-x} \rightarrow +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$.
Puisque $S(1/x) = S(x)$, on obtient par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow 1^+} S(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

Exercice 79 : [énoncé]

Pour $|x| \geq 1$, la série est grossièrement divergente.

Pour $|x| < 1$,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et donc la série est absolument convergente.

La fonction S est définie sur $] -1 ; 1[$.

Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.

u_n est de classe \mathcal{C}^1 , $\sum u_n$ converge simplement,

$$u'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

donc pour $a \in [0 ; 1[$,

$$\|u'_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq n \frac{a^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u'_n$ sur tout segment de $] -1 ; 1[$.

Par suite la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 .

$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

Pour $x \in [0 ; 1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)}$$

Puisque $\sum_{p \geq 0} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$ converge et $\sum_{n \geq 1} \sum_{p=0}^{+\infty} |(-1)^p x^{n(p+1)}|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_p(x)$$

avec $u_p(x) = x^{p+1} \frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x \in [0 ; 1[$.

La fonction u_p est continue sur $[0 ; 1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.

Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum (-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left\| \sum_{k=p+1}^{\infty} (-1)^k u_k(x) \right\|_{\infty} \leq u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leq \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0 ; 1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$

et finalement

$$S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$$

Exercice 80 : [énoncé]

Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

Sachant

$$2|nx| \leq 1 + n^2x^2$$

on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Les fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur \mathbb{R} .

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$$

Soit $a > 0$. Pour $|x| \geq a$,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R}^* .

La somme S est donc une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Montrons que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x} (S(x) - S(0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x} (S(x) - S(0)) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)}$$

Par le changement de variable $u = tx$

$$\frac{1}{x} (S(x) - S(0)) \geq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{u(1+u^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

car la fonction positive $u \mapsto 1/u(1+u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

Exercice 81 : [\[énoncé\]](#)

Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$$

Chaque f_n est continue et $\|f_n\|_\infty = \frac{\pi}{2n^2}$ est terme général d'une série convergente.

Par convergence normale, on peut affirmer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .

Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n(1+(nx)^2)}$$

Pour $a > 0$, sur $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; -a]$,

$$\|f'_n\|_\infty \leq \frac{1}{n(1+(na)^2)}$$

ce qui donne la convergence normale de la série des dérivées.

Ainsi, par convergence uniforme sur tout segment, on obtient f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Exercice 82 : [\[énoncé\]](#)

a) En vertu du théorème des accroissements finis

$$|u_n(x)| \leq (\sqrt{n+x} - \sqrt{n}) \sup_{\sqrt{n}\sqrt{n+x}} |(\arctan)'| = \frac{\sqrt{n+x} - \sqrt{n}}{1+n}$$

donc

$$|u_n(x)| \leq \frac{x}{(1+n)(\sqrt{n} + \sqrt{n+x})} \leq \frac{x}{2\sqrt{n}(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et donc la fonction S est bien définie.

Les fonctions u_n sont continue et pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall x \in [0; a], |u_n(x)| \leq \frac{a}{2\sqrt{n}(n+1)}$$

On peut donc affirmer la convergence uniforme sur tout segment de la série $\sum u_n$ ce qui assure la continuité de S .

b) Montrons que S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Remarquons que par le théorème des accroissements finis

$$u_n(n) = \arctan\sqrt{2n} - \arctan\sqrt{n} \geq \frac{\sqrt{2n} - \sqrt{n}}{1+2n} \sim \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{n}}$$

et il y a donc divergence vers $+\infty$ de la série $\sum u_n(n)$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^N u_n(n) \geq A$$

Pour $x \geq N$,

$$S(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(N) \geq \sum_{n=0}^N u_n(n) \geq A$$

On peut donc affirmer

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Exercice 83 : [\[énoncé\]](#)

a) Posons

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$$

Les fonctions u_n sont définies et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} car $u_n(x) \sim 1/n^2$.

On a

$$u'_n(x) = \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}$$

donc sur $[-a; a]$,

$$\|u'_n\|_\infty \leq \frac{2a}{n^4}$$

et la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de \mathbb{R} .

On peut conclure que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 .

b) La fonction $t \mapsto 1/(t^2 + x^2)$ est décroissante donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

c) On peut écrire

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{1 + x^2/n^2} \right) = \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n^4} \frac{x^4}{n^2 + x^2}$$

et par convergence des sommes introduites

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^4} + x^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)}$$

Or

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4(n^2 + x^2)} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} < +\infty$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90}x^2 + O(x^4)$$

Exercice 84 : [énoncé]

Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

Puisque les fonctions f_n sont toutes impaires, on limite l'étude à $x \in [0; +\infty[$. À partir d'un certain rang N_x , on a $x/n \leq \pi/2$ et alors

$$\sin(x/n) \in [0; 1]$$

La série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie alors les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang N_x et par conséquent cette série converge. Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} et donc sa fonction somme, que nous noterons S , est définie sur \mathbb{R} .

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

de sorte que

$$\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur \mathbb{R} et donc la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , *a fortiori* cette fonction est continue.

Exercice 85 : [énoncé]

a) Posons $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.

Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{1+na} \rightarrow 0$$

pour tout $a > 0$.

Par convergence uniformément sur tout segment d'une série de fonctions continue, S est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

b) Par convergence uniformément sur $[a; +\infty[$,

$$\lim_{+\infty} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt} = 1$$

Par application du critère spécial des séries alternées

$$1 - \frac{1}{1+t} \leq S(t) \leq 1$$

- c) Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.

$$f'_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}$$

La série $\sum f'_n(t)$ est alternée avec $|f'_n(t)| = \frac{n}{(1+nt)^2}$.

Puisque

$$|f'_n(t)| - |f'_{n+1}(t)| = \frac{n(n+1)t^2 - 1}{(1+nt)^2(1+(n+1)t)^2}$$

la suite $(|f'_n(t)|)$ décroît vers 0 à partir d'un certain rang.

Soit $a > 0$.

À partir d'un certain rang n_0 ,

$$n(n+1)a^2 - 1 \geq 0$$

et alors pour tout $t \geq a$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à partir du rang n_0 .

On a alors

$$|R_n(t)| \leq \frac{n}{(1+nt)^2} \leq \frac{n}{(1+na)^2}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{n}{(1+na)^2} \rightarrow 0$$

Ainsi la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$.

Par théorème, on peut alors conclure que S est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 86 : [énoncé]

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}$$

- a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées et donc $\sum u_n$ converge simplement. La fonction S est donc bien définie, elle est évidemment impaire.

- b) Soit $a > 0$. Par le critère spécial des séries alternées

$$|R_n(x)| \leq \frac{x}{(n+1)+x^2} \leq \frac{a}{n+1} \text{ pour } x \in [-a; a]$$

et donc

$$\|R_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{a}{n} \rightarrow 0$$

Il y a convergence uniforme sur $[-a; a]$ pour tout $a > 0$ et donc convergence uniforme sur tout segment de \mathbb{R} .

De plus chaque fonction u_n est continue donc S est continue.

- c) Par le critère spécial des séries alternées, on peut encadrer S par deux sommes partielles consécutives

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2+x^2} \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$$

et on peut donc affirmer $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 87 : [énoncé]

- a) Pour $x \in]-1; 1[$,

$$|u_n(x)| = o(|x|^n)$$

donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

Pour $x = 1$,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

donc $\sum u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.

Pour $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$,

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + o\left(\frac{1}{|x|^n}\right)$$

donc $\sum u_n(x)$ est somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

- b)

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1/x^n}{1+1/x^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

- c) Soit $a \in [0; 1[$.

$$\|f\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{a^n}{1-a^n} \leq \frac{a^n}{1-a}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a; a]$.

Par convergence uniforme d'une série de fonctions continues sur tout segment de $]-1; 1[$, on peut affirmer que f est continue sur $]-1; 1[$. Puisque $f(x) = C^{te} - f(1/x)$, f est aussi continue sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$ par composition de fonctions continues.

d) Pour $x \in [0; 1]$, la série $\sum u_n(x)$ est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n} \frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n \geq 0}$ décroît vers 0 (après étude non détaillée ici) donc le critère spécial des séries alternées s'applique et

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

puis

$$\|R_n\|_{\infty, [0;1]} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

La série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ donc f est continue sur $[0; 1]$ et donc continue à gauche en 1. Par la relation du b) on obtient aussi f continue à droite en 1.

Exercice 88 : [énoncé]

a)

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.

b)

$$\ln \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) \right)$$

avec $x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) = x \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right)$. Or la série $\sum \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right)\right) = x \ln n + \gamma x + o(1) - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

c) Posons $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ pour $x > 0$ et $n \geq 1$. f_n est \mathcal{C}^1 , $\sum f_n$ converge simplement et $f'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 89 : [énoncé]

a) Si $x \leq 0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x > 0$ alors $n^2 f_n(x) = e^{2 \ln n - x n^\alpha} \rightarrow 0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$. f est définie sur $]0; +\infty[$.

b) Les fonctions f_n sont continues. Pour $a > 0$, $\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que f est continue.

c) Par convergence uniforme sur $[a; +\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.

Exercice 90 : [énoncé]

a) Pour $x < 0$, $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Pour $x = 0$, $u_n(x) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge. Pour $x > 0$, $u_n(x) = o(1/n^2)$ par croissance comparée et donc $\sum u_n(x)$ converge absolument.

On conclut $I = \mathbb{R}_+$

b) Pour $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\|u_n\|_{\infty, [a; b]} = \sup_{x \in [a; b]} |u_n(x)| \leq \frac{n^\alpha b e^{-na}}{n^2 + 1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de \mathbb{R}_+^* . Sa somme est alors continue sur \mathbb{R}_+^* .

c) Après étude des variations de la fonction,

$$\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u_n(x)| = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha < 2$.

d) On peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha e^{-k/n}}{k^2 + 1} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + 1} e^{-k/n} \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k/n}$$

Or par sommation géométrique

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k/n} = \frac{1}{2n} \frac{e^{-(n+1)/n}}{1 - e^{-1/n}} \rightarrow \frac{1}{2e}$$

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.
S'il y avait convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ alors

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \rightarrow 0$$

ce qui vient d'être exclu.

e) Si S est continue en 0 alors par sommation de terme positif

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq S(1/n) \rightarrow S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

Exercice 91 : [\[énoncé\]](#)

Puisque $a_n > 0$ et $\sum a_n(1 + |x_n|)$ converge, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x_n$ sont absolument convergentes.

Posons $f_n(x) = a_n |x - x_n|$.

Comme $|a_n |x - x_n|| \leq |a_n| |x| + |a_n x_n|$, la série des fonctions f_n converge simplement sur \mathbb{R} .

Les fonctions f_n sont continues et sur $[-M; M]$, $\|f_n\|_{\infty} \leq M a_n + a_n |x_n|$.

Par convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme f est continue.

Soit $[\alpha; \beta] \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \notin [\alpha; \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\alpha; \beta]$ et $f'_n(x) = \varepsilon a_n$ avec $|\varepsilon| = 1$.

Par convergence normale de la série des dérivées sur $[\alpha; \beta]$, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur tout intervalle ouvert $]a; b[$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin]a; b[$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x_n = a$.

En considérant $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a\}$, on peut écrire par absolue convergence

$$f(x) = \sum_{n \in A} a_n |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A} a_n |x - x_n| = \alpha |x - a| + g(x)$$

avec $\alpha > 0$.

Puisque la série $\sum a_n$ converge, pour N assez grand, $\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_n \leq \frac{\alpha}{2}$.
On peut alors écrire

$$f(x) = \alpha |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \geq N+1} a_n |x - x_n| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \leq N} a_n |x - x_n|$$

La fonction $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \leq N} a_n |x - x_n|$ est dérivable au voisinage de a .
Cependant, la fonction

$$\varphi: x \mapsto \alpha |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \geq N+1} a_n |x - x_n|$$

n'est quand à elle pas dérivable en a .

En effet, pour $h > 0$,

$$\frac{1}{h} (\varphi(a+h) - \varphi(a)) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$$

alors que pour $h < 0$,

$$\frac{1}{h} (\varphi(a+h) - \varphi(a)) \leq -\alpha + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}$$

Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

Exercice 92 : [\[énoncé\]](#)

a) En vertu du théorème des accroissements finis

$$|u_n(x)| \leq x \sup_{[n; n+x]} |(\arctan)'| = \frac{x}{1+n^2}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et donc la fonction S est bien définie.

Les fonctions u_n sont continue et pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall x \in [0; a], |u_n(x)| \leq \frac{a}{1+n^2}$$

On peut donc affirmer la convergence uniforme sur tout segment de la série $\sum u_n$ ce qui assure la continuité de S .

b) Montrons que S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Sachant

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$$

on peut réécrire

$$S(x) = \arctan x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{(n+x)} \right)$$

Les termes sommés étant tous positifs

$$S(x) \geq \arctan x + \sum_{n=1}^N \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{(n+x)} \right)$$

Or, quand $x \rightarrow +\infty$

$$\arctan x + \sum_{n=1}^N \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{(n+x)} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^N \arctan \frac{1}{n}$$

Puisque la série $\sum \arctan \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente, pour $A \in \mathbb{R}$ quelconque, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=1}^N \arctan \frac{1}{n} \geq A$$

et alors, pour x assez grand

$$\arctan x + \sum_{n=1}^N \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{(n+x)} \right) \geq A$$

puis

$$S(x) \geq A$$

Exercice 93 : [énoncé]

Posons $u_n(x) = (-1)^{n-1} \ln(1 + x/n)$.

Pour chaque $x \geq 0$, la série $\sum u_n(x)$ est alternée et $(|u_n(x)|)_{n \geq 0}$ décroît vers 0.

On en déduit que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$ et la fonction S est donc bien définie.

Les fonctions u_n sont de classe \mathcal{C}^1 et $u'_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$. Le critère spécial des séries alternées s'applique encore à $\sum u'_n(x)$.

Pour $x \in [0; a]$ (avec $a > 0$ préalablement fixé)

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que $\sum u'_n$ converge uniformément sur $[0; a]$.

Via convergence uniforme sur tout segment de $\sum u'_n$, on peut affirmer que S est de classe \mathcal{C}^1 et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$$

Par le critère spécial, le signe de cette somme est celui de son premier terme et donc $S'(x) \geq 0$.

La fonction S est alors croissante.

Exercice 94 : [énoncé]

- a) Puisque $\|a\| < 1$ et $\|a^n\| \leq \|a\|^n$, la série $\sum a^n$ est absolument convergente et sa somme S vérifie $(1_E - a)S = S(1_E - a) = 1_E$ donc $1_E - a$ est inversible d'inverse S .
- b) Pour $\alpha \in [0; 1[$, on montre par convergence normale la continuité de $a \mapsto (1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ sur $\bar{B}(0, \alpha)$. On en déduit que $x \mapsto x^{-1}$ est continue en 1_E .
- c) Soit $a \in U(E)$. Quand $x \in U(E) \rightarrow a$ alors $xa^{-1} \rightarrow 1_E$ donc $(xa^{-1})^{-1} \rightarrow 1_E^{-1} = 1_E$ puis $x^{-1} = a^{-1}(xa^{-1})^{-1} \rightarrow a^{-1}$. Ainsi $x \mapsto x^{-1}$ est continue en chaque $a \in U(E)$.

Exercice 95 : [énoncé]

- a) Pour que les termes sommés aient un sens il faut $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$. Inversement, si $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ alors les termes sommés existent et puisque

$$\frac{1}{n(n-z)} \sim \frac{1}{n^2}$$

la série définissant $f(z)$ converge absolument. Finalement, f est définie sur Ω .

- b) Posons $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$u_n(z) = \frac{1}{n(n-z)}$$

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^* \mid \operatorname{Re}(z) \leq a\}$. Pour tout $z \in \Omega_a$

$$|u_n(z)| = \frac{1}{n} \frac{1}{|n-z|}$$

Pour $n \geq a$,

$$|n-z| \geq |n - \operatorname{Re}(z)| \geq n-a$$

et donc

$$|u_n(z)| = \frac{1}{n(n-a)}$$

Ce majorant indépendant de z est sommable, il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur Ω_a . Or les fonctions u_n sont continues, donc f est continue sur Ω_a . Ceci valant pour tout $a \geq 0$, on peut conclure que f est continue sur Ω .

Exercice 96 : [énoncé]

a) $\|t^k A^k\| = |t|^k \|A\|^k$ avec $|t| \|A\| < 1$ donc la série converge simplement. De plus

$$(I - tA) \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k - \sum_{k=1}^{+\infty} t^k A^k = I$$

donc $(I - tA)f(t) = I$ d'où $f(t) = (I - tA)^{-1}$.

b) Soit $\rho \in [0; 1/\|A\|]$. $t \mapsto t^k A^k$ est de classe \mathcal{C}^1 et de dérivée $kt^{k-1} A^k$ avec

$$\|kt^{k-1} A^k\|_{\infty, [-\rho; \rho]} \leq k\rho^{k-1} \|A\|^k$$

terme général d'une série convergente. La série des fonctions dérivée converge donc normalement sur $[-\rho; \rho]$ ce qui assure que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1/\|A\| ; 1/\|A\| [$ et

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)t^k A^{k+1} = A \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)t^k A^k \right)$$

Or par produit de Cauchy de série absolument convergente :

$$(f(t))^2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n t^k A^k t^{n-k} A^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n A^n$$

donc

$$f'(t) = A(f(t))^2$$

Exercice 97 : [énoncé]

a) $\|\frac{1}{k} t^k A^k\| = \frac{1}{k} |t|^k \|A\|^k$ avec $|t| \|A\| < 1$ donc la série converge simplement.

b) Soit $\rho \in [0; 1/\|A\|]$. $t \mapsto \frac{1}{k} t^k A^k$ est de classe \mathcal{C}^1 et de dérivée $t^{k-1} A^k$ avec

$$\|t^{k-1} A^k\|_{\infty, [-\rho; \rho]} \leq \rho^{k-1} \|A\|^k$$

terme général d'une série convergente. La série des fonctions dérivées converge donc normalement sur $[-\rho; \rho]$ ce qui assure que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1/\|A\| ; 1/\|A\| [$ et

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k \right) A.$$

Or

$$(I - tA) \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k - \sum_{k=1}^{+\infty} t^k A^k = I$$

donc $(I - tA)f'(t) = A$.