Chap 5

Séries dans un evn de dimension finie
Familles sommables
Résumé

I) Séries dans un evn de dimension finie.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un evn de dimension finie

1) Généralités

Déf 1

La série $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge si et ssi la suite vectorielle $(S_n)_{n\geq 0}$ converge ; où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k}$$

La série $\sum_{n\geq N} U_n$ converge si et ssi la suite vectorielle $(S_n)_{n\geq N}$ converge ; où

$$\boxed{\forall n \geq N,\ S_n = \sum_{k=N}^{n} U_k}$$

$\sum_{n\geq 0} U_n$ converge $\iff \sum_{n\geq N} U_n$ converge

En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=N}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{N-1} U_n$$

Prop 2

1) $\sum_n U_n$ converge $\Longrightarrow \lim_n U_n = 0$

2) $\left(U_n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0\right) \Longrightarrow \sum_n U_n$ diverge

Prop 3

$\left(\text{La suite } (U_n)_n \text{ converge}\right) \Longleftrightarrow \left(\text{La série télescopique } \sum (U_{n+1} - U_n) \text{ converge}\right)$

2) Lien avec les séries composantes

Ici

- $B = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E.
- Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{i=1}^{d} U_n^i e_i$
- Les suites $(U_n^i)_n$ sont les suites composantes de (U_n) dans B
- Les séries $\sum_n U_n^i$ sont les séries composantes de $\sum U_n$ dans B.

Prop 4

1) $\sum U_n$ converge $\Longleftrightarrow \left(\forall\, 1 \leq i \leq d, \sum_n U_n^i \text{ converge}\right)$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \geq 0}^{+\infty} U_n = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{n \geq 0}^{+\infty} U_n^i \right) e_i$$

3) Séries absolument convergentes (ACV)

Déf 5

$\sum_n U_n$ est ACV $\Longleftrightarrow \sum_n \|U_n\|$ CV

Prop 6

1) $\sum U_n$ ACV $\Longrightarrow$ $\sum U_n$ CV

2) Si $\sum U_n$ est ACV, on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|U_n\|$$

C'est l'inégalité triangulaire

4) Algèbre normée

Déf 7

Soit $(A, +, \cdot, \times)$ une algèbre.
Si $(A, \| \ \|)$ est un evn vérifiant :

$$\forall x, y \in A, \ \|x y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

On dit que A est une algèbre normée.

Prop 8

Si A est une algèbre normée, on a :

$$\boxed{\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \ \|a^n\| \leqslant \|a\|^n}$$

Prop 9

Soit A une algèbre normée de dimension finie.
Si $a \in A$ avec $\|a\| < 1$, alors :

1) La série $\sum_{n \geqslant 0} a^n$ est ACV.

2) $(1 - a)$ est inversible et on a :

$$\boxed{(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n}$$

Prop et déf 10

Soit A une algèbre normée de dimension finie.

Si $a \in A$.

1) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ est ACV.

2) La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ se note $\exp(a)$ et s'appelle exponentielle de a.

Prop 11

Soit A une algèbre normée de dimension finie. On a :

1) $\exp(0) = 1_A$.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exp(\lambda . 1_A) = e^{\lambda} . 1_A$

3) Si a et $b \in A$ avec $ab = ba$, alors

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

4) $\forall a \in A$, $\exp(a)$ est inversible et on a : $(\exp(a))^{-1} = \exp(-a)$

Cas particulier important : L'algèbre normée $M_d(\mathbb{R})$

1) $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$

2) $\exp(O_d) = I_d$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exp(\lambda . I_d) = e^{\lambda} . I_d$

4) Si A et $B \in M_d(\mathbb{R})$, avec $AB = BA$, on a :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

5) $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est une matrice inversible, et on a :

$$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$$

II) Familles sommables

Jusqu'à la fin du chapitre, toutes les familles $(a_i)_{i\in I}$ sont des familles de nombres réels ou complexes.

2) Familles sommables positives

Déf 12

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

1) $(a_i)_{i\in I}$ est dite famille sommable si et ssi l'ensemble suivant est une partie majorée de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\left\{\sum_{j\in J} a_j \;/\; J \text{ partie finie de } I\right\}}$$

2) Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, la borne supérieure de l'ensemble $\left\{\sum_{j\in J} a_j \;/\; J \text{ partie finie de } I\right\}$ s'appelle la somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$, et se note $\sum_{i\in I} a_i$.

Réflexes

Supp que $(a_i)_{i\in I}$ est une f^lle sommable positive, on a :

1) $$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left(\left\{\sum_{j\in J} a_j \;/\; J \text{ partie finie de } I\right\}\right)$$

2) Si $J\subset I$ et fini, on a :

$$\boxed{\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{i\in I} a_i}$$

Convention

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille positive non sommable, on convient d'écrire :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = +\infty}$$

Prop 13 (Cas d'une famille finie)

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille positive et finie, alors elle est sommable, et sa somme coïncide avec sa somme finie $\sum_{i\in I} a_i$.

Prop 14 (Critère de comparaison)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles positives vérifiant :

$$\boxed{\forall i\in I,\ a_i \leq b_i}$$

1) i) $(b_i)_{i\in I}$ sommable $\Longrightarrow$ $(a_i)_{i\in I}$ sommable

ii) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i}$$

2) $\Big((a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable$\Big) \Rightarrow \Big((b_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable$\Big)$

Prop 15 (Lien avec les séries)

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille positive. On a

1) $\boxed{(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \Longleftrightarrow \text{La série } \sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)} \text{ converge}}$

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}}$$

Prop 16

I est supposé dénombrable.
Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow I$ une bijection.
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille positive. On a

1) $\boxed{(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)} \text{ converge}}$

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}}$$

Corollaire 17

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes positifs. On a :

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable $\iff$ La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Prop 18

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs. On a aussi :

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable $\iff$ La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Exemples express et fréquents :

1) i) $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$ sommable $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_{-n}$ CV

ii) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^-} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n}$$

2) i) $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^{-*}}$ sommable $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} a_{-n}$ CV

ii) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^{-*}} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$$

Prop 19

Soit $(a_i)_{i\in I}$ famille positive sommable.

Toute sous-famille de $(a_i)_{i\in I}$ est aussi sommable.

Sommations par paquets

Prop 20

$(a_i)_{i\in I}$ famille positive et I dénombrable.

I_1 et I_2 forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Leftrightarrow$ $(a_i)_{i\in I_1}$ et $(a_i)_{i\in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i}$$

Prop 21

$(a_i)_{i\in I}$ famille positive et I dénombrable.

$I_1, \dots, I_n$ forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Leftrightarrow$ $(\forall 1 \leq k \leq n,\ (a_i)_{i\in I_k}$ est sommable$)$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right)$$

Prop 22

$(a_i)_{i\in I}$ famille positive et I dénombrable.

$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{a) } \forall k\in\mathbb{N},\ (a_i)_{i\in I_k} \text{ est sommable} \\ \text{b) La série } \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right) \text{ converge} \end{cases}$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right)$$

2) Familles sommables de réels et complexes

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf 23

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

$(a_i)_{i\in I}$ est dite sommable si et ssi la famille positive $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Prop et Déf 24

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels.

1) $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ sont sommables.

2) La somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ est :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$$

Prop et Déf 25

Soit $(a_j)_{j\in I}$ une famille sommable de complexes.

1) $(Re(a_j))_{j\in I}$ et $(Im(a_j))_{j\in I}$ sont sommables.

2) La somme de la famille $(a_j)_{j\in I}$ est :

$$\sum_{j\in I} a_j = \sum_{j\in I} Re(a_j) + i.\sum_{j\in I} Im(a_j)$$

Prop 26

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série à termes réels ou complexes. On a :

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ ACV

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$$

Prop 27

1) Toute famille finie de réels ou complexes est sommable.

2) Sa somme coïncide avec sa somme finie $\sum\limits_{i\in I} a_i$.

Prop 28 (Lien avec les séries)

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes. On a :

1) $$\boxed{(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)} \text{ ACV}}$$

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}}$$

Prop 29 (Combinaison linéaire)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels ou complexes.

Toute combinaison linéaire $(\alpha a_i + \beta b_i)_{i\in I}$ est aussi sommable, et on a :

$$\sum_{i\in I} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha . \sum_{i\in I} a_i + \beta . \sum_{i\in I} b_i$$

Prop 30 (Inégalité triangulaire)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels ou complexes. On a :

$$\boxed{\left| \sum_{i\in I} a_i \right| \leq \sum_{i\in I} |a_i|}$$

Prop 31

Toute sous-famille d'une famille sommable de réels ou complexes est aussi une famille sommable.

Sommations par paquets

Prop 32

$(a_i)_{i\in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

I_1 et I_2 forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\iff$ $(a_i)_{i\in I_1}$ et $(a_i)_{i\in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i}$$

Prop 33

$(a_i)_{i\in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

$I_1, \dots, I_n$ forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\iff$ $\left(\forall 1\leq k\leq n,\ (a_i)_{i\in I_k} \text{ est sommable}\right)$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right)$$

Prop 34 (Sommation par paquets)

I dénombrable et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels ou complexes. On a :

1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $(a_i)_{i\in I_n}$ sommable.

2) La série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$ ACV.

3) $$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$$

C'est la sommation par paquets

NB

Pour montrer la sommabilité de la f^lle $(a_i)_{i\in I}$ de réels ou complexes, On applique à la f^lle positive $(|a_i|)_{i\in I}$ la caractérisation par paquets.

3) Suites doubles

Partitions usuelles de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

1) $(\mathbb{N}\times\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2) $(\{n\}\times\mathbb{N})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

3) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

où $I_n=\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, i+j=n\}$

NB

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, i+j=n\}$$

$$I_n = \{(i, n-i) \,/\, 0 \leq i \leq n\}$$

$$I_n = \{(n-i, i) \,/\, 0 \leq i \leq n\}$$

Partitions usuelles de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

1) $\left(\mathbb{N}^* \times \{n\}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

2) $\left(\{n\} \times \mathbb{N}^*\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

3) $(I_n)_{n \geq 2}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

où $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,/\, i+j=n\}$

NB

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,/\, i+j=n\}$$

$$I_n = \{(i, n-i) \,/\, 1 \leq i \leq n-1\}$$

$$I_n = \{(n-i, i) \,/\, 1 \leq i \leq n-1\}$$

Prop 35

Soit $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double positive.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) A) $\forall m\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}\right)$ converge.

iii) A) $\forall n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{m\geq 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn}\right)$ converge.

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn}\right)}$$

Prop 36

Soit $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou complexes.

Supposons que $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On a :

$$\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn}\right)}$$

NB

En pratique, pour montrer la sommabilité de la suite double $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, on applique la (prop 1) à la suite $(|a_{mn}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

4) Produit de Cauchy de deux suites complexes

Déf 37

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries complexes.

Le produit de Cauchy de ces deux séries est la série $\sum_{n\geq 0} C_n$

où :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}$$

N B :

On a aussi :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Prop 38

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries complexes ACV. On a :

1) La suite double $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

2) La série produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} C_n$ est ACV.

3) $$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q$$

Fin