Définition 1 : (Convergence simple)

Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.

f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X si et seulement si

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Vocabulaire : f est dite la *limite simple* de la suite $(f_n)_n$ sur X.

Soit $f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

Exemple 1

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0\,;1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n).

On pose

Exemple 2

$$u_n(x) = e^{-nx}\sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0\,;+\infty[$.

1) Modes de Convergences d'une Suite de Fonctions

Définition 1 : (Convergence simple)

Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X si et seulement si

$$\forall x \in X, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Vocabulaire : f est dite la *limite simple* de la suite $(f_n)_n$ sur X.

Soit $f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par Exemple 1

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0\,;1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n).

On pose Exemple 2

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0\,;+\infty[$.

Proposition 3 :

Soit $x \in [0;+\infty[$. On a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = \ldots = ? \hookrightarrow U(x)$$

(u_n) CS vers U sur $[0;+\infty[$ où :

$$U(x) = ?$$

Scanned with CamScanner

Définition 2 : (Convergence uniforme)

Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X si et seulement si

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \succeq N,\ \underbrace{\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \preceq \varepsilon}_{\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon}$$

$\underbrace{\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|}_{\|f_n - f\|_\infty}$

$\|f_n - f\|_\infty$ ↳ dite norme de la convergence uniforme

$\left((f_n)_n \text{ CU vers } f \text{ sur } X \right)$

$\Longleftrightarrow$

$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon \right)$

$\Updownarrow$

$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

$\Longleftrightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} f_n = f \right)$: pour la norme $\|.\|_\infty$

norme sur l'evn $B(X, E)$

Attention ! La réciproque est en général fausse

$\left(\forall x \in A,\ x \leq M \right)$

$\Updownarrow$

$\sup(A) \leqslant M$

→ le plus petit des majorants de A

$(E, \|\cdot\|)$ evn

$\lim_n x_n = l \Longleftrightarrow \lim_n \|x_n - l\| = 0$

Proposition 5 :

S'il existe une suite positive $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{cases} \textbf{1)}\ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \\ \textbf{2)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{\forall x \in X,\ \| f_n(x) - f(x) \| \leq \alpha_n} \end{cases}$$

alors $(f_n)_n$ *converge uniformément* vers f sur X.

ne dépend pas de x

$$\sup_{x \in X} \| f_n(x) - f(x) \| \leq \alpha_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \| f_n - f \|_\infty \leq \alpha_n \to 0$$

Gendarmes

$$\Rightarrow \| f_n - f \|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Car (f_n) C.U f sur X

$$(\forall x \in A,\ x \leq M)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\operatorname{Sup}(A)}_{\text{le plus petit des majorants de } A} \leq M$$

$(E, \|\cdot\|)$ evn

$$\lim_n x_n = l \iff \lim_n \| x_n - l \| = 0$$