Mathématiques 2

MP **2021**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Inégalités de Bernstein

EXTRAIT

I Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

Dans cette partie,

— si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n ;

— si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\exists (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \exists (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

On remarque que les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont des fonctions bornées ;

I.A – Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Q 1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n, puis montrer que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 2. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

I.B – Inégalité de Bernstein

Soit n un entier naturel non nul.

Q 6. Soit $A \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, scindé à racines simples, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ ses racines. Montrer que

$$\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], \quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X - \alpha_k)A'(\alpha_k)}. \tag{I.1}$$

Soit P dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.

Q 7. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifier que $X - 1$ divise P_λ.

Pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on note Q_λ le quotient de P_λ par $X - 1$:

$$Q_\lambda(X) = \frac{P(\lambda X) - P(\lambda)}{X - 1} \in \mathbb{C}_{2n-1}[X].$$

Q 8. Montrer que, pour tout λ dans $\mathbb{C}$, $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$.

On considère le polynôme $R(X) = X^{2n} + 1$. Pour k dans $[\![1, 2n]\!]$, on note $\varphi_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}$.

Q 9. Montrer que

$$R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k).$$

Q 10. À l'aide de la formule (I.1), montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{X - \omega_k} \omega_k$$

puis en déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}. \tag{I.2}$$

Q 11. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

On pourra appliquer l'égalité (I.2) au polynôme X^{2n}.

Soit maintenant f dans $\mathcal{S}_n$.

Q 12. Montrer qu'il existe $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} U(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Q 13. Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, $\dfrac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} = \dfrac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$ et déduire des questions 11 et 12 que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(\theta + \varphi_k) \frac{(-1)^k}{2\sin(\varphi_k/2)^2}. \tag{I.3}$$

Centrale MP 2021 : épreuve 2
Un corrigé

I. Inégalité polynomiale de Bernstein et applications.

I.A - Polynômes de Tchebychev

1. On montre par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(T_n) = n}$.
   - C'est vrai aux rang 0 et 1.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ qui est somme de deux polynômes de degrés $n+1$ et $n-1$. Comme ces degrés sont différents, T_{n+1} est de degré $\max(n+1, n-1) = n+1$.

   $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ étant échelonnée en degré est libre. Elle contient $n+1$ éléments de $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Ainsi,

$$\boxed{(T_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$$

2. Procédons encore par récurrence.
   - C'est vrai aux rang 0 et 1.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a alors

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta) + T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

   Comme $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$, le résultat au rang $n+1$ s'en déduit.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$$

I.B - Inégalité de Bernstein

6. Par hypothèse, et en notant c le coefficient dominant de A,

$$A = c\prod_{j=1}^{2n}(X-\alpha_j)$$

On en déduit que

$$A' = c\sum_{k=1}^{2n}\prod_{\substack{1\le j\le 2n\\ j\ne k}}(X-\alpha_j)$$

et en particulier

$$A'(\alpha_k) = c\prod_{\substack{1\le j\le 2n\\ j\ne k}}(\alpha_k-\alpha_j)$$

Posons $L_k = \frac{A(X)}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}$. $L_k \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ et on a (immédiat si $j\ne k$ et calcul précédent si $j=k$)

$$L_k(\alpha_j) = \delta_{j,k}$$

En particulier, $B - \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k)L_k$ est nul en tous les α_j. Quans $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$, c'est un polynôme de degré $\le 2n-1$ qui est donc nul (puisqu"il a au moins $2n$ racine).

$$\boxed{\forall B\in\mathbb{C}_{2n-1}[X],\quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B\left(\alpha_k\right)\frac{A(X)}{\left(X-\alpha_k\right)A'\left(\alpha_k\right)}}$$

On peut aussi utiliser la décomposition en éléments simple de $\frac{B}{A}$*, particulièrement aisée puisque les pôles sont simples.*

7. On a $P_\lambda(1)=0$ et donc $\boxed{(X-1) \text{ divise } P_\lambda}$.

8. On fixe $\lambda\in\mathbb{C}$. Les deux membres de l'égalité à prouver étant des expressions linéaires vis à vis de P, il suffit de vérifier la formule pour des P formant une base de $\mathbb{C}_{2n}[X]$, par exemple les X^k. Or,

$$\frac{(\lambda X)^k-\lambda^k}{X-1} = \lambda^k(X^{k-1}+X^{k-2}+\cdots+1)$$

et la valeur en 1 est $k\lambda^k$, qui est bien $\lambda(k\lambda^{k-1})$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C},\ Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)}$$

9. On remarque tout d'abord que
$$R(\omega_k) = e^{2in\varphi_k} + 1 = 0$$
et ω_k est racine de R. De plus
$$\varphi_k - \varphi_\ell = (k-\ell)\frac{\pi}{n}$$
Si $k, \ell \in [\![1, 2n]\!]$, $-2n < k - \ell < 2n$ et donc $\varphi_k - \varphi_\ell \in]-2\pi, 2\pi[$ n'est nul que si $k = \ell$.
On a ainsi $2n$ racines différentes pour R unitaire de degré $2n$ et donc
$$\boxed{R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k)}$$

10. Si on applique (I.1) avec $A = R$ et $\alpha_k = \omega_k$ (qui sont bien distincts), on obtient, compte-tenu de $R'(\omega_k) = 2n\omega_k^{2n-1} = -\frac{2n}{\omega_k}$ (puisque $\omega_k^{2n} = -1$)
$$B(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{B(\omega_k)R(X)}{X - \omega_k}\omega_k$$
Ceci est vrai pour $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ et en particulier pour Q_λ. Comme les ω_k sont différents de 1, l'expression de Q_λ donne alors
$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\,\frac{X^{2n}+1}{X - \omega_k}\omega_k}$$
Appliquons cette formule en $\lambda = 1$. Avec la question 8, on a alors
$$\lambda P'(\lambda) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\,\frac{2}{1 - \omega_k}\omega_k$$
Il reste à couper la somme en deux pour conclure que
$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}}$$

11. (I.2) avec $P = X^{2n}$ donne,
$$2n\lambda^{2n} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\lambda^{2n}\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -\frac{\lambda^{2n}}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$$
On en déduit que
$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -n$$
ce qui permet, après multiplication par $P(\lambda)$ de réécrire le second terme de (II.2) et de conclure que
$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda)}$$

12. Soit $f \in \mathcal{S}_n$. Il lui est associé une suite $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ et une suite $(b_k)_{1\leq k\leq n}$. Avec les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikt} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ikt}\right) \\ &= e^{-int}\left(a_0 e^{int} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{i(k+n)t} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{i(n-k)kt}\right)\right) \end{aligned}$$

Si on pose

$$U(X) = a_0 X^n + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}X^{k+n} + \frac{a_k + ib_k}{2}X^{n-k}\right)$$

on obtient un élément de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que $f(t) = e^{-int}U(e^{it})$.

$$\boxed{\exists U \in \mathbb{C}_{2n}[X],\ \forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \mathrm{e}^{-in\theta}U\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}$$

13. On a $1 - \omega_k = e^{i\varphi_k/2}(e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2}) = -2ie^{i\varphi_k/2}\sin(\varphi_k/2)$ et ainsi

$$\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{-4e^{i\varphi_k}\sin(\varphi_k/2)^2} = \frac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

Appliquons la question 11 au polynôme U. Avec l'expression ci-dessus, on obtient

$$\lambda U'(\lambda) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U\left(\lambda\omega_k\right)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(\lambda)$$

En particulier, pour $\lambda = e^{it}$, on obtient (puisque $f'(t) = -inf(t) + ie^{-int}e^{it}U'(e^{it})$)

$$\begin{aligned} -ie^{int}(f'(t) + inf(t)) &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U\left(e^{i(t+\varphi_k)}\right)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(e^{it}) \\ &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} e^{in(t+\varphi_k)}f(t+\varphi_k)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + ne^{int}f(t) \end{aligned}$$

Comme $e^{in\varphi_k} = i(-1)^k$, on conclut que

$$-if'(t) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} i(-1)^k f(t+\varphi_k)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\theta + \varphi_k\right)\frac{(-1)^k}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2}}$$