SOLUTION

$1^{\text{ère}}$ **partie : Étude de l'application** f_m

1. R est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et admet $n+1$ racines $x_o, x_1, \cdots, x_n$ distinctes deux à deux, donc R est le polynôme nul.

2. Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_m^2$.

$$f_m(\lambda.P+Q) = ((\lambda.P+Q)(x_o), \cdots, (\lambda.P+Q)(x_n)) = ((\lambda.P(x_o)+Q(x_o), \cdots, (\lambda.P(x_n)+Q(x_n))$$
$$= \lambda.f_m(P) + f_m(Q).$$

3. (a) $P \in Kerf_m$ équivaut à $P(x_i) = 0$, pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, donc le polynôme $\pi = (X-x_o)(X-x_1)\cdots(X-x_n)$ divise P; et, comme $deg(P) \leq m$ et $deg(\pi) = n+1$, donc il existe $Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}$ tel que $P = Q\ \pi$. D'où, $Kerf_m \subseteq \{Q\ \pi\ ;\ Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$. Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que le polynôme π admet $x_o, x_1, \cdots, x_n$ comme racines.

(b) D'abord $Kerf_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{P}_m$, puisque $n+1 \leq m$.

$*$ Si $P \in Kerf_m \cap \mathcal{P}_m$, alors pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $P(x_i) = 0$, et $deg(P) \leq n$; et; d'après la question 1), le polynôme P est nul. D'où, Ker $f_m \cap \mathcal{P}_m = \{0\}$.

$*$ Soit $H \in \mathcal{P}_m$. On effectue la division euclidienne de H par π, il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $H = Q\ \pi + R$ et $deg(R) < deg(\pi) = n+1$; donc $H \in Kerf_m + \mathcal{P}_n$. D'où, $\mathcal{P}_m = Kerf_m + \mathcal{P}_n$. Ainsi, $\mathcal{P}_m = Kerf_m \bigoplus \mathcal{P}_n$.

(c) $dim(Kerf_m) = dim(\mathcal{P}_m) - dim(\mathcal{P}_n) = (m+1) - (n+1) = m - n$.

$(X^i\ \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$ est une famille de polynômes échelonnées de $Kerf_m$, donc elle est libre; et, comme son cardinal est égal à la dimension de $Kerf_m$, donc $(X^i\ \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$ est une base de $Kerf_m$.

(d) $*$ $rg(f_m) = dim(\mathcal{P}_m) - dim(Kerf_m) = (m+1) - (m-n) = n+1$.

$*$ Comme $Im(f_m) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ et $rg(f_m) = n+1 = dim(\mathbb{R}^{n+1})$, donc $Im(f_m) = \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi, l'application f_m est surjective.

4. Dans cette question, $m \leq n$.

(a) Si $P \in Kerf_m$, alors les $n+1$ réels $x_o, x_1, \cdots, x_n$ sont des racines de P deux à deux distinctes et $deg(P) \leq m < n+1$, donc P est nul. D'où, f_m est injectif.
(b) f_m étant injective, donc $Kerf_m = \{0\}$; et, par suite
$rg(f_m) = dim(\mathcal{P}_m) - dim(Kerf_m) = m+1$.
(c) f_m est surjective si, et seulement si, $rg(f_m) = dim(\mathbb{R}^{n+1})$ si, et seulement si, $m = n$.
5. (a) Pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $deg(L_i) = n$.
Soit $(k, i) \in \{0, 1, \cdots, n\}^2$.
Si $k = i$, $L_i(x_i) = \prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \dfrac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} = 1$,

si $k \neq i$, $\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j) = 0$; et, par suite $L_i(x_k) = \dfrac{\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j)}{\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_i - x_j)} = 0$.

(b) Soit $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$.
$f_n(L_i) = (L_i(x_0), L_i(x_1), \cdots, L_i(x_n)) = (\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \cdots, \delta_{i,i}, \cdots, \delta_{i,n}) = (0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots, 0)$, le réel 1 est situé à la $(i+1)^{\text{ème}}$ place.
La famille $(f_n(L_o), f_n(L_1), \cdots, f_n(L_n))$ représente la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$.
(c) Soit $(\alpha_O, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i.L_i = 0$. Donc, pour tout $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on a $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i.L_i(x_j) = 0$ c'est-à-dire $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i.\delta_{i,j} = 0$ ce qui traduit à $\alpha_j = 0$. D'où, $(L_o, L_1, \cdots, L_n)$ est une famille libre; et, comme le cardinal de cette famille est égal à $dim(\mathcal{P}_n) = n+1$, donc $(L_o, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.
(d) i. D'après la question 4), l'application f_n est bijective de $\mathcal{P}_n$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc, pour tout $y = (y_o, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que
$f_n(P_y) = y = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$.
ii. D'après la question précédente, $f_n(P_y) = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$. Comme $P_y \in \mathcal{P}_n$ et $(L_o, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$, donc il existe $(\beta_o, \beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P_y = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i.L_i$. Et, par suite

$(y_o, y_1, \cdots, y_n) = f_n(P_y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i.f_n(L_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \beta_i.\varepsilon_i = (\beta_o, \beta_1, \cdots, \beta_n)$. Ainsi, $P_y = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i L_i$.

$2^{\text{ème}}$ partie : Approximation polynômiale au moindres carrés

A. On suppose $m \geq n+1$.

1. D'après la question d-3) de la première partie, l'application f_m est surjective de $\mathcal{P}_m$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc, pour l'élément $(y_o, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe $Q_o \in \mathcal{P}_m$ tel que

$f_m(Q_o) = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$.

2. $*$ On rappelle que $f_m(Q_o) = (Q_o(x_o), \cdots, Q_o(x_n))$. Pour tout $P \in \mathcal{P}_m$, $\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - P(x_i))^2$ est positif; et, comme $\Phi_m(Q_o) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - Q_o(x_i))^2 = 0$, donc la valeur minimal λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$ est nulle.

$*$ $(Q \in \mathcal{P}_m,\ \Phi_m(Q) = 0)$ équivaut à $(Q \in \mathcal{P}_m,\ Q(x_i) = y_i = Q_o(x_i),\ \textit{pour tout } i \in \{0, 1, \cdots, n\})$ équivaut à $Q - Q_o \in Ker f_m$.

L'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte est $Q_o + Ker f_m$.

Fin