Séries et Intégrales impropres

Exercice (Extrait de : Centrale 2015)

1) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$ converge.

2) i) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que

$$H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$$

ii) En déduire que $H_n \sim \ln n$

3) Soit r un entier naturel.

Pour quelles valeurs de r, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Fin Extrait