Fonctions à paramètre Classiques

Exercice (Transformée de Laplace)
$L^{\infty}([0,+\infty[,\mathbb{C})$ désignera l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit $f \in L^{\infty}([0,+\infty[,\mathbb{C})$. On appelle *transformée de Laplace* de f l'application $L(f)$ définie par

$$\forall x > 0,\ L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

1) Vérifier que si $f \in L^{\infty}([0,+\infty[,\mathbb{C})$, $L(f)$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que
   i) Pour $f(t) = 1$, $L(f)(x) = \frac{1}{x}$.
   ii) Pour $f(t) = \sin(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = \frac{\omega}{x^2+\omega^2}$.
3) Montrer que L est une application linéaire de $L^{\infty}([0,+\infty[,\mathbb{C})$ vers $\mathcal{C}(]0,+\infty[,\mathbb{C})$.
4) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{C})$ telle que f et f' soient bornées.
   Montrer que
   $$\forall x > 0,\ L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0)$$
5) Soit $f \in L^{\infty}([0,+\infty[,\mathbb{C})$. Montrer que
   $$\lim_{x\to+\infty} xL(f)(x) = f(0)$$
   Indication : Vous pouvez utiliser un changement de variable.
6) Soit $f \in L^{\infty}([0,+\infty[,\mathbb{C})$.
   Supposons en plus que f possède une limite finie L en $+\infty$.
   Montrer que
   $$\lim_{x\to 0} xL(f)(x) = L$$

Solution

1) Vérifier que si $f \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$, $L(f)$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $f \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$.

Mq que $L(f)$ est bien définie sur $[0,+\infty[$.

Càd : $(\forall x \in]0,+\infty[,\ L(f)(x)$ est définie$)$

$$\boxed{L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt}$$

Soit alors $x \in]0,+\infty[$.

Il s'agit de vérifier que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ Converge.

On a f est Continue et bornée sur $[0,+\infty[$.

Alors : $(\exists M \geqslant 0,\ \forall t \in [0,+\infty[,\ |f(t)| \leq M)$

On a $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est Continue sur $[0,+\infty[$.

et : $(\forall t \in [0,+\infty[,\ |f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt})$

Or $\int_0^{+\infty} Me^{-xt}dt$ Converge, car $x > 0$

D'où $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}|dt$ Converge.

Et donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ Converge, car absolument Convergente.

CQFD

2) Montrer que

i) Pour $f(t) = 1$, $L(f)(x) = \frac{1}{x}$.

Supposons que $f(t) = 1$.

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$$

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

$$= \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{x} \quad \left(e^{-xt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \; ; x > 0 \right)$$

2) Montrer que

i) Pour $f(t) = 1$, $L(f)(x) = \frac{1}{x}$.

ii) Pour $f(t) = \sin(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = \frac{\omega}{x^2+\omega^2}$.

Méthode 1

Supposons $f(t) = \sin(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$.

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-xt} dt$$

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\left(e^{i\omega t} \cdot e^{-xt} \right) dt$$

$$= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot e^{-xt}\right) dt$$

$$= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i\omega - x)t}\, dt\right)$$

D'autre part, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(i\omega - x)t}\, dt = \left[\frac{e^{(i\omega - x)t}}{i\omega - x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{i\omega - x}\left(\lim_{t \to +\infty} e^{(i\omega - x)t} - 1\right)$$

Et on a : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{(i\omega - x)t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(e^{i\omega t} \times e^{-xt}\right) = 0$

Car $t \mapsto e^{i\omega t}$ bornée sur $[0, +\infty[$ et $e^{-xt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{(i\omega - x)t}\, dt = \frac{1}{x - i\omega}$$

Et donc :

$$L(f)(x) = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i\omega - x)t}\, dt\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x - i\omega}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{x+i\omega}{(x-i\omega)(x+i\omega)}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{x+i\omega}{x^2+\omega^2}\right)$$

$$= \frac{\omega}{x^2+\omega^2}$$

Méthode 2 (via 2 intégrations parties)

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)\, e^{-xt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-xt}}{-x}\right)' \sin(\omega t)\, dt \qquad (x > 0)$$

$$\underline{\underline{IPP}} \quad \underbrace{\left[\frac{e^{-xt}}{-x} \cdot \sin(\omega t)\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{-x} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)\, dt$$

Car $t \mapsto \sin(\omega t)$ bornée

et $e^{-xt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

$$= \frac{\omega}{x} \cdot \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-xt}}{-x}\right)' \cdot \cos(\omega t)\, dt$$

$$\overset{IPP}{=} \frac{w}{x}\left(\underbrace{\left[\frac{e^{-xt}}{-x}\cdot\cos(wt)\right]_0^{+\infty}}_{=\frac{1}{x}} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{-x}\cdot w\cdot -\sin(wt)\,dt\right.$$

Car $t \mapsto e^{-xt}\cos(wt)$ bornée

et $e^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$$= \frac{w}{x^2} - \frac{w^2}{x^2}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(wt)\,dt$$

$$\Rightarrow L(f)(x) = \frac{w}{x^2} - \frac{w^2}{x^2}\cdot L(f)(x)$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{w^2}{x^2}\right)L(f)(x) = \frac{w}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{w^2+x^2}{x^2}\,L(f)(x) = \frac{w}{x^2}$$

Enfin : $L(f)(x) = \dfrac{w}{w^2+x^2}$ $\square$

3) Montrer que L est une application linéaire de $L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$ vers $\mathcal{C}(]0,+\infty[,\mathbb{C})$.

i)

Soient $f, g \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

M. que $L(\lambda f+g) = \lambda L(f) + L(g)$.

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

C à d M que :

$$\forall x > 0, \quad L(\lambda f+g)(x) = \lambda L(f)(x) + L(g)(x)$$

Soit alors $x > 0$. On a :

$$L(\lambda f+g)(x) = \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + g(t)) e^{-xt} dt$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt + \int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt$$

$$= \lambda L(f)(x) + L(g)(x)$$

$\square$

ii) M que : $\forall f \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C}), \; L(f) \in \mathcal{C}(]0,+\infty[,\mathbb{C})$

C à d que L est une application d'abord.

Soit $f \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$. M. que $L(f)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

On a : $\boxed{\forall x > 0, \quad L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt}$

On a :

α) $\forall t \in [0,+\infty[,\ x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

β) $\forall x \in]0,+\infty[,\ t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est CPM sur $[0,+\infty[$.

γ) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Soient $x \in [a,b]$ et $t \in [0,+\infty[$. On a :

$$|f(t)e^{-xt}| = |f(t)|.e^{-xt}$$

$$\leq M e^{-at} \quad (\text{où } \forall t \geq 0, |f(t)| \leq M)$$

En plus $\int_0^{+\infty} M e^{-at}\,dt$ converge, car $a > 0$.

De α), β) et γ) on tire que la fonction $L(f)$ est continue sur $]0,+\infty[$. $\square$

4) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{C})$ telle que f et f' soient bornées. Montrer que

$$\forall x > 0,\ L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0)$$

Soit $x > 0$. On a :

$$\boxed{L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt}$$

$$L(f')(x) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}\,dt$$

$$= \underbrace{\left[f(t)e^{-xt}\right]_0^{+\infty}}_{= -f(0)} - \int_0^{+\infty} f(t).(-x e^{-xt})\,dt \quad (IPP)$$

Car f bornée et $e^{-xt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} f(t)e^{-xt} = 0$

$$= -f(0) + x\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$$

D'où :

$$\boxed{L(f')(x) = x\,L(f)(x) - f(0)}$$

$\square$

---

5) Soit $f \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} xL(f)(x) = f(0)$$

Indication : Vous pouvez utiliser un changement de variable.

Soit $x > 0$. On a :

$$x\,L(f)(x) = \int_0^{+\infty} x\,f(t)\,e^{-xt}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f\left(\frac{s}{x}\right)e^{-s}\,ds \quad \text{, via le changement de variable } xt = s$$

D'où :

$$\lim_{x\to+\infty} x\,L(f)(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f\left(\frac{s}{x}\right)e^{-s}\,ds$$

On espère intervertir $\lim\limits_{x\to+\infty}$ avec $\int_0^{+\infty}$:

α) $\forall x\in\,]0,+\infty[$, $s \mapsto f\left(\frac{s}{x}\right)e^{-s}$ est CPM sur $[0,+\infty[$, car continue.

β) Soit $s\in[0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{s}{x}\right)e^{-s} = f(0)\,e^{-s}$ et $s \mapsto f(0)e^{-s}$

est CPM, car continue, sur $[0,+\infty[$.

γ) $\forall (x,s) \in]0,+\infty[\times [0,+\infty[$, on a :

$$\left| f\left(\frac{s}{x}\right) e^{-s} \right| = \underbrace{\left| f\left(\frac{s}{x}\right) \right|}_{\leq M,\text{ car } f \text{ bornée}} \cdot e^{-s} \leq M e^{-s}$$

et que la fonction $s \mapsto M e^{-s}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, de α), β) et γ) on tire que :

$$\lim_{+\infty} x L(f)(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{s}{x}\right) e^{-s} ds$$

$$= \int_0^{+\infty} f(0) e^{-s} ds$$

$$= f(0) \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-s} ds}^{=1}$$

$$= f(0)$$

$\square$

6) Soit $f \in L^\infty([0, +\infty[, \mathbb{C})$.
Supposons en plus que f possède une limite finie L en $+\infty$.
Montrer que

$$\lim_{x \to 0} xL(f)(x) = L$$

Supposons que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = L$.

M.q. $\lim_{x \to 0} x L(f)(x) = L$

Soit $x > 0$. On a :

$$x L(f)(x) = \int_0^{+\infty} x f(t) e^{-xt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f\left(\frac{s}{x}\right) e^{-s} ds$$, via le changement de variable $xt = s$

D'où :

$$\lim_{x \to 0} x L(f)(x) = \lim_{x \to 0} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{s}{x}\right) e^{-s} ds$$ (on vise l'intervertion de lim avec $\int$)

On a :

α) $\forall x \in]0, +\infty[$, $s \mapsto f\left(\frac{s}{x}\right) e^{-s}$ est CPM sur $[0, +\infty[$

β) $\forall s \in [0, +\infty[$, $\lim_{x \to 0} f\left(\frac{s}{x}\right) e^{-s} = \ell(s)$

où $\ell(s) = \begin{cases} L e^{-s} & \text{si } s > 0 \\ f(0) & \text{si } s = 0 \end{cases}$

Et la fonction ℓ est bien CPM sur $[0, +\infty[$ (non pas continue)

γ) Soit $(x,s) \in \left]0,+\infty\right[\times \left[0,+\infty\right[$, on a :

$$\left|f\left(\frac{s}{x}\right)e^{-s}\right| = \underbrace{\left|f\left(\frac{s}{x}\right)\right|}_{\leq M,\text{ car } f \text{ bornée}} \cdot e^{-s} \leq M e^{-s}$$

et que la fonction $s \longmapsto Me^{-s}$ est intégrable sur $\left[0,+\infty\right[$.

Ainsi, de α), β) et γ) on tire que :

$$\lim_{x \to 0} x L(f)(x) = \lim_{x \to 0} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{s}{x}\right) e^{-s} ds$$

$$= \int_0^{+\infty} \ell(s)\, ds$$

$$\boxed{\ell(s) = \begin{cases} L e^{-s} & \text{si } s > 0 \\ f(0) & \text{si } s = 0 \end{cases}}$$

$$= \int_0^{+\infty} L e^{-s} ds$$

$$= L$$

$\square$

Fin