Prop et déf 3

Soit A une algèbre normée de dimension finie.

Soit $a \in A$.

1) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ est ACV.

2) La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ se note $\exp(a)$ et s'appelle exponentielle de a.

Pr. ELAMIRI

Prop et déf 3

Soit A une algèbre normée de dimension finie.

Soit $a \in A$.

1) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ est ACV.

2) La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ se note $\exp(a)$ et s'appelle exponentielle de a.

Cas très fréquent !

Si $A = M_p(\mathbb{K})$

SI

1) $\forall M \in M_p(\mathbb{K})$, $\sum_{n \geq 0} \frac{M^n}{n!}$ ACV (

2) $\exp(M) = e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$

Exemple express

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\exp(N) = ?$

Cas très fréquent !

Si $A = M_p(\mathbb{K})$.

SI !

1) $\forall M \in M_p(\mathbb{K})$, $\sum_{n \geq 0} \frac{M^n}{n!}$ ACV $\begin{pmatrix} \text{donc} \\ \text{CV} \end{pmatrix}$

2) $\exp(M) = e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$

Exemple express)

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\exp(N) = ?$

Sol

$$\exp(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{N^n}{n!} \qquad \begin{pmatrix} N^2 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ N^n = 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{N^0}{0!} + \frac{N^1}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Scanned with CamScanner

Q)

$$\boxed{\begin{gathered} \exp(I_p) = ? \\ \exp(\lambda I_p) = ? \end{gathered}}$$

1) $\exp(I_p) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_p^n}{n!} \qquad (I_p^n = I_p)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{I_p}_{\hookrightarrow \text{Constante}} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right)}_{= e^1 = e} I_p = e\, I_p$$

D'où $\exp(I_p) = e \cdot I_p$

2) $$\exp(\lambda I_p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda I_p)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot I_p^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot I_p = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\right)}_{= e^{\lambda}} \cdot I_p = \boxed{e^{\lambda} \cdot I_p}$$

Dời :

$$\exp(\lambda I_p) = e^{\lambda} \cdot I_p$$

Q

$$\exp(PMP^{-1}) = ??$$

Q)

$$\exp(PMP^{-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(PMP^{-1})^n}{n!}$$

Constante   Constante

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} P \cdot M^n \cdot P^{-1} \right)$$

$$= P \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} \right)}_{= \exp(M)} \cdot P^{-1}$$

$$\boxed{\exp(PMP^{-1}) = P \cdot \exp(M) \cdot P^{-1}}$$

Scanned with CamScanner

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0 \quad (e^x > 0)$

$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0 \quad (e^z \in \mathbb{C}^*)$

Now $\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ e^A$ invertible

$e^A \in GL_n(\mathbb{K})$

Don't forget !!

$\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1$

le Sup

$z = a + bi$ $\quad (\cos b + i \sin b)$

$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$

$e^{a+bi} \neq 0 \Leftarrow |e^{a+bi}| = e^a \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, \; e^x \neq 0 \; (e^x > 0)$

$\forall z \in \mathbb{C}, \; e^z \neq 0 \; (e^z \in \mathbb{C}^*)$

Now $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \; e^A$ invertible

Don't forget !!

$\therefore e^A \in GL_n(\mathbb{K})$

On rappelle que

Si $MN = NM$, on a $\left| \begin{array}{l} e^{M+N} = e^{M} \times e^{N} \\ \exp(M+N) = \exp(M) \times \exp(N) \end{array} \right.$

Q) M.que :

$\forall M \in M_p(\mathbb{K}),\ \exp(M) \in GL_p(\mathbb{K})$

et préciser $(\exp(M))^{-1}$

Scanned with CamScanner

Q) $\bigcap$. que :

$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ \exp(M) \in GL_p(\mathbb{K})$

et préciser $(\exp(M))^{-1}$

Rép)

$\exp(M) \times ? = I_p \quad (I_p = \exp(0))$

$I_p = \exp(0) = \exp(M + (-M)) = \boxed{\exp(M) \times \exp(-M)}$

↳ car M et $(-M)$ commutent

D'où
- ⇝ $\exp(M)$ inversible
- ⇝ $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$

$$\boxed{(e^M)^{-1} = e^{-M}}$$

Scanned with CamScanner