ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2018 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES – A – (XLCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Pour tous entiers $l, m \in \mathbb{N}^*$, on notera $\mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant l lignes et m colonnes. Lorsque $l = m$, on notera $\mathscr{M}_l(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $l \times l$. Par ailleurs :

- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{R})$, on notera A^{T} la transposée de A.
- On notera $O_{l,m}$ la matrice nulle de $\mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls. Lorsque $l = m$, O_l désignera la matrice nulle et I_l la matrice identité de $\mathscr{M}_l(\mathbb{R})$.
- Pour toute famille $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ de réels, on notera $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_l)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_l(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $a_1, a_2, \ldots, a_l$.
- Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{R})$, on notera $\langle A, B\rangle_F = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$ où $\mathrm{tr}(M)$ désigne la trace de M pour toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A\rangle_F}$. On pourra utiliser sans démonstration que $\langle\ ,\ \rangle_F$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ et que $\mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_F$ est un espace vectoriel normé de dimension lm.
- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{R})$, on notera $\mathrm{rg}(A)$ le rang de la matrice A c'est-à-dire la dimension de l'image de A. On rappelle que $\mathrm{rg}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}(A)$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{M}^k_{l,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(A) = k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique et pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$, on notera $\|x\|_2$ la norme euclidienne de x.

Préliminaire

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ trois entiers strictement positifs. Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

1. Donner l'expression de $\langle A, B\rangle_F$ en fonction des coefficients de A et B.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\|Au\|_2 \leqslant \|A\|_F \|u\|_2$.
3. Montrer que $\|AC\|_F \leqslant \|A\|_F \|C\|_F$.

Première partie

On considère trois entiers n, p et k strictement positifs tels que $\mathscr{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ soit non vide. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $k \leqslant \min(n, p)$ et que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda A \in \mathscr{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$.
5. Soient $S = AA^{\mathrm{T}}$ et $\tilde{S} = A^{\mathrm{T}}A$.
   (a) Vérifier que S est une matrice symétrique qui n'admet que des valeurs propres positives puis montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(S)$.
   (b) Soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de S pour une valeur propre $\lambda > 0$ et soit $v = A^{\mathrm{T}}u/\sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}^p$. Montrer que v est un vecteur propre de $\tilde{S}$ pour la valeur propre λ et $\|v\|_2 = \|u\|_2$.
6. (a) Montrer qu'il existe $U \in \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ telles que $S = U\Lambda U^{\mathrm{T}}$ avec $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k > 0$ et $U^{\mathrm{T}}U = I_k$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(U)$ et que UU^{T} est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(U)$ dans $\mathbb{R}^n$.
   (c) En posant $V = A^{\mathrm{T}}UD \in \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ où $D = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \ldots, 1/\sqrt{\lambda_k}) \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$, montrer que $V^{\mathrm{T}}V = I_k$ et $\tilde{S} = V\Lambda V^{\mathrm{T}}$.
7. En déduire que
$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}},$$
avec $\Sigma = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_k})$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on s'intéresse à la meilleure approximation, pour la norme $\|\cdot\|_F$, d'une matrice de rang k par une matrice de rang fixé. Cette partie est indépendante des parties suivantes.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ une matrice de rang k où n, p et k sont des entiers strictement positifs, $k \leqslant \min(n,p)$. On considère la décomposition $A = U\Sigma V^T$ construite dans la première partie. Soient $l \in \mathbb{N}^*$ et $\widetilde{V} \in \mathscr{M}_{p,l}(\mathbb{R})$ tels que $l < k$ et $\widetilde{V}^{\mathrm{T}}\widetilde{V} = I_l$. On note $(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_l) \in (\mathbb{R}^p)^l$ la famille des colonnes de $\widetilde{V}$ et $(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^p)^k$ celle des colonnes de V.

8. (a) Vérifier que $\|A - A\widetilde{V}\widetilde{V}^{\mathrm{T}}\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \|A\widetilde{V}\widetilde{V}^{\mathrm{T}}\|_F^2$.

   (b) Montrer que
$$\|A\widetilde{V}\widetilde{V}^{\mathrm{T}}\|_F^2 = \sum_{h=1}^{k}\left(\lambda_h \sum_{m=1}^{l} \langle v_h, \tilde{v}_m\rangle_2^2\right)$$
   où $\langle\ ,\ \rangle_2$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$.

9. On suppose ici que $\lambda_l > \lambda_{l+1}$.

   (a) Pour tout $l+1 \leqslant i \leqslant k$ et tout $1 \leqslant j \leqslant l$, on pose $a_i = \sum_{m=1}^{l}\langle v_i, \tilde{v}_m\rangle_2^2$ et $b_j = 1 - \sum_{m=1}^{l}\langle v_j, \tilde{v}_m\rangle_2^2$.
   Montrer que les (a_i) et (b_j) sont des réels positifs et que l'on a $\sum_{i=l+1}^{k} a_i \leqslant \sum_{j=1}^{l} b_j$.

   (b) Montrer que $\|A\widetilde{V}\widetilde{V}^{\mathrm{T}}\|_F^2 \leqslant \sum_{h=1}^{l}\lambda_h$ et que l'on a l'égalité si et seulement si on a $\mathrm{Vect}(\{v_1, \ldots, v_l\}) = \mathrm{Im}(\widetilde{V})$ où $\mathrm{Vect}(X)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par $X \subset \mathbb{R}^p$.

   (c) Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}^l(\mathbb{R})$. Montrer que $\|M - A\|_F^2 \geqslant \sum_{h=l+1}^{k}\lambda_h$ avec égalité si et seulement si $M = U_*\Sigma_*V_*^{\mathrm{T}}$ où $\Sigma_* = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_l})$, U_* (resp. V_*) est la matrice formée des l premières colonnes de U (resp. de V).

Troisième partie

Soient p, k deux entiers strictement positifs et $V \in \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ tel que $V^{\mathrm{T}}V = I_k$. Pour tout $W \in \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R})$, on note $M_{V,W}$ la matrice de $\mathscr{M}_{p+k}(\mathbb{R})$ définie par blocs par

$$M_{V,W} = \begin{pmatrix} V & I_p \\ O_k & W^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

10. On suppose ici que $W^{\mathrm{T}}V$ est une matrice inversible.

    (a) Montrer que $M_{V,W}$ est inversible. On notera son inverse $M_{V,W}^{-1}$.

    (b) Montrer que l'orthogonal $\mathrm{Im}(W)^{\perp}$ de $\mathrm{Im}(W)$ et $\mathrm{Im}(V)$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^p$ i.e. $\mathrm{Im}(W)^{\perp} \oplus \mathrm{Im}(V) = \mathbb{R}^p$.
    Indication : On pourra commencer par vérifier que pour $z \in \mathbb{R}^p$, si $z \in \mathrm{Im}(W)^{\perp}$ alors $W^{\mathrm{T}}z = 0$.

    (c) On définit la matrice

    $$P_{V,W} = (V \ O_p) M_{V,W}^{-1} \begin{pmatrix} I_p \\ O_{k,p} \end{pmatrix}.$$

    Montrer que $P_{V,W}$ est la matrice de la projection sur $\mathrm{Im}(V)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(W)^{\perp}$.

11. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ est un ouvert et que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur cet ouvert.

12. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de V dans $\mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ tel que $W^{\mathrm{T}}V$ est inversible pour tout $W \in \mathscr{V}$ et l'application $W \mapsto P_{V,W}$ est continue de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Quatrième partie

Soient n, p et k trois entiers strictement positifs tels que $k \leqslant \min(n, p)$. On définit pour toute la suite l'espace vectoriel

$$\mathscr{E} = \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_k(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R}).$$

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ une matrice de rang k et $(U, \Sigma, V) \in \mathscr{E}$ tels que

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}, \ U^{\mathrm{T}}U = V^{\mathrm{T}}V = I_k$$

et Σ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs (l'existence de (U, Σ, V) a été montrée dans la première partie).

13. Soient $(\overline{U}, \overline{\Sigma}, \overline{V}) \in \mathscr{E}$. On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par $\gamma(t) = (U + t\overline{U})(\Sigma + t\overline{\Sigma})(V + t\overline{V})^{\mathrm{T}}$.

    (a) Montrer que les fonctions $t \mapsto \mathrm{rg}(U + t\overline{U})$, $t \mapsto \mathrm{rg}(\Sigma + t\overline{\Sigma})$ et $t \mapsto \mathrm{rg}(V + t\overline{V})$ sont constantes au voisinage de $t = 0$.

    (b) En déduire que $\gamma(t) \in \mathscr{M}_{n,p}^{k}(\mathbb{R})$ au voisinage de $t = 0$.

    (c) Montrer que γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de la dérivée $\gamma'(0)$ de γ en 0.

14. On note $T_A = \{\overline{U}\Sigma V^{\mathrm{T}} + U\overline{\Sigma}V^{\mathrm{T}} + U\Sigma\overline{V}^{\mathrm{T}} \mid (\overline{U}, \overline{\Sigma}, \overline{V}) \in \mathscr{E},\ \overline{U}^{\mathrm{T}}U = \overline{V}^{\mathrm{T}}V = O_k\ \}$.

    (a) Vérifier que tous les éléments de T_A sont des vecteurs tangents à $\mathscr{M}_{n,p}^{k}(\mathbb{R})$ en A et que T_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.

    (b) Soit $N_A = \{\overline{N} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid \overline{N}^{\mathrm{T}}U = O_{p,k},\ \overline{N}V = O_{n,k}\ \}$. Montrer que N_A est le sous-espace orthogonal à T_A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_F$.

15. Soit $\tilde{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que $\tilde{A}$ vérifie la condition (C) si

$$\text{(C)}\quad \mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{V}\mathrm{V}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{A}}) \text{ et } \mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}\mathrm{U}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})\,.$$

    (a) Montrer que si $\tilde{A}$ vérifie la condition (C) alors $\mathrm{rg}(\tilde{A}) \leqslant k$ et

$$\mathrm{Im}(\tilde{A}^{\mathrm{T}}UU^{\mathrm{T}})^{\perp} = \ker(\tilde{A})\,.$$

    (b) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\tilde{A} \in \mathscr{M}_{n,p}^{k}(\mathbb{R})$, la matrice $\tilde{A}$ vérifie la condition (C) dès que $\|\tilde{A} - A\|_F \leqslant \epsilon$.

16. Soit $\phi : \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par $\phi(\tilde{A}) = (\tilde{A}VV^{\mathrm{T}}, \tilde{A}^{\mathrm{T}}UU^{\mathrm{T}})$ pour tout $\tilde{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

    (a) Identifier $\ker(\phi)$ en fonction de N_A introduit à la question (14b).

    (b) On note $\pi_A : \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la projection orthogonale sur T_A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\phi = \phi \circ \pi_A$.

    (c) Soit $\tilde{A} \in \mathscr{M}_{n,p}^{k}(\mathbb{R})$ vérifiant la condition (C). On note $W = \tilde{A}^{\mathrm{T}}UU^{\mathrm{T}}$. Montrer que si $P_{V,W}$ est la matrice de la projection sur $\mathrm{Im}(V)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(W)^{\perp}$ alors

$$\tilde{A} = \tilde{A}VV^{\mathrm{T}}P_{V,W}\,.$$

17. En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la restriction de π_A à $\mathscr{M}_{n,p}^{k}(\mathbb{R}) \cap B(A, \epsilon)$ est injective où $B(A, \epsilon) = \{\tilde{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid \|\tilde{A} - A\|_F < \epsilon\ \}$ est la boule ouverte de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ centrée en A et de rayon ϵ.

18. Soit ρ_A la projection orthogonale sur N_A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer pour tout $\tilde{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $\rho_A(\tilde{A}) = (I_n - UU^{\mathrm{T}})\tilde{A}(I_p - VV^{\mathrm{T}})$.

   (b) Montrer que $\rho_A(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

   Soit $\tilde{A} \in \mathscr{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ vérifiant la condition (C).

   (c) Montrer que si $W = \tilde{A}^{\mathrm{T}}UU^{\mathrm{T}}$

$$\rho_A(\tilde{A}) = (I_n - UU^{\mathrm{T}})(\tilde{A} - A)VV^{\mathrm{T}}(P_{V,W} - P_{V,V})(I_p - VV^{\mathrm{T}})\,.$$

   (d) En déduire que $\|\rho_A(\tilde{A})\|_F \leqslant \sqrt{(n-k)k(p-k)}\,\|\tilde{A} - A\|_F\|P_{V,W} - P_{V,V}\|_F$.

19. Montrer que T_A est exactement l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathscr{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ en A.