Espaces Vectoriels et Applications Linéaires

N.B : $\mathbb{K}$ *désignera* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1) A_1 est l'ensemble des polynômes réels P vérifiant P(0)=1.
2) A_2 est l'ensemble des polynômes réels ayant a comme racine.
   ($a \in \mathbb{R}$ fixé).
3) A_3 est l'ensemble des polynômes réels ayant au moins une racine réelle.
4) A_4 est l'ensemble des polynômes réels de degré 3.

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1) A_1 est l'ensemble des suites réelles convergentes vers 1.
2) A_2 est l'ensemble des suites réelles négligeables devant n^2
3) A_3 est l'ensemble des suites réelles équivalentes à n^2.
4) A_4 est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n - 3$$

5) A_5 est l'ensemble des suites réelles arithmétiques.
6) A_6 est l'ensemble des suites réelles géométriques.

Exercice 3

F et G deux parties de l'espaces vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

$$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$$
$$G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$$

1) Montrer que F et G sont deux plans vectoriels.
2) Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Exercice 4

F la partie de l'espaces vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \int_0^1 P(t)dt = 0\}$$

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que F est un plan vectoriel

Exercice 5

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ et \ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0\}$
Montrer que :

1) F est un $\mathbb{K}$-esp vectoriel.
2) F est un plan vectoriel.

Exercice 6

Le complémentaire d'un sev reste-il un sev ?

Exercice 7

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ f(x, y) = 2x + y - 1.$
2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ g(x, y) = xy.$
3) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\ h(x, y, z) = x - y + 2z.$
4) $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\ k(x, y, z) = x - 2y.$

Exercice 8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto \varphi(P) = (P(a), P(b))$

1) Montrer que $\varphi \in L(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^2)$.
2) Supposons dans cette question que $a = -1$ et $b = 3$.
   Déterminer $ker(\varphi)$ et $Im(\varphi)$
3) Déterminer $ker(\varphi)$ et $Im(\varphi)$ dans chacun des cas suivants :
   i) Si $a \neq b$
   ii) Si $a = b$

Exercice 9

Montrer que les applications φ et ψ sont linéaires; où :
$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]\ ;\ \varphi(P) = P' - (X - 2)P$
$\psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]\ ;\ \psi(P) = P - (X - 2)P'$

Exercice 10

Notons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \to E$ une application. Montrer que $\varphi \in L(E)$ dans chacun des cas suivants :

1) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ (\varphi(f))(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$
2) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ (\varphi(f))(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt$
3) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ (\varphi(f))(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$

Exercice 11

Notons $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$; $f \mapsto \varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$

1) Montrer $\varphi \in L(E)$

2) Déterminer $ker(\varphi)$ et vérifer que c'est un plan vectoriel. φ est-il injectif ?

Exercice 12

$E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\Delta : E \to E$; $f \mapsto \Delta(f) = f' - f$

1) Montrer $\Delta \in L(E)$

2) i) Déterminer $ker(\Delta)$. Δ est-il injectif ?

   ii) $ker(\Delta)$ est-il une droite vectorielle ? un plan vectoriel ?

3) Déterminer $ker(\Delta^2)$. Est-il une droite vectorielle ? un plan vectoriel ?

Exercice 13

$\mathbb{C}$ est considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto u(z) = iz - i\overline{z}$.

1) Montrer que $u \in L(\mathbb{C})$

2) Déterminer $ker(u)$ et $Im(u)$.

3) i) Calculer u^2

   ii) En déduire que $(I_{\mathbb{C}} + 2u)$ est inversible, et préciser son inverse.

Exercice 14

E un $\mathbb{K}$ esp vectoriel et f et g deux endomorphismes de E.
Supposons que $f \circ g = Id_E$. Montrer que $E = ker(f) \oplus Im(g)$

Exercice 15

Soient E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel et f un endomorphisme de E. Montrer que

$$f^2 = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset ker(f)$$

Exercice 16 (*Utile à retenir*)

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-esp vectoriels. Soient $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$.
Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow Im(f) \subset ker(g)$$

Exercice 17

Soient E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel et u et v deux endomorphismes de E vérifiant $u \circ v = v \circ u$.
Définition : *Soient F un sev de E et $f \in L(E)$. F est dit **stable** par f si et seulement si : $(\forall x \in F,\ f(x) \in F)$*

1. Montrer que $ker(v)$ et $Im(v)$ sont stables par u.
2. Supposons que $E = ker(u) \oplus ker(v)$.
   Montrer que $Im(u) \subset ker(v)$ et $Im(v) \subset ker(u)$

Exercice 18

Soient E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel et φ une forme linéaire non nulle sur E.

1) Justifier qu'il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) \in \mathbb{K}^*$.

2) Montrer que :

   i) φ est surjective.

   ii) $E = vect(a) \oplus ker(\varphi)$

Exercice 19

Soient E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel et f un endomorphisme de E.

1) Montrer les inclusions suivantes *(toujours vraies et à retenir)* :

   i) $ker(f) \subset ker(f^2)$

   ii) $Im(f^2) \subset Im(f)$

2) Montrer les équivalences suivantes :

   i) $ker(f) = ker(f^2) \Leftrightarrow \ (Im(f) \cap ker(f) = \{0\})$

   ii) $Im(f^2) = Im(f) \Leftrightarrow \ E = Im(f) + ker(f)$

Exercice 20

Soient E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel et $f \in L(E)$ vérifiant $f^3 = f^2 + f$.
Montrer que $E = ker(f) \oplus Im(f)$.
Indices : *Noter que :*
$f \circ (I_E + f - f^2) = 0$ *et que* $(\forall x \in E,\ x = (x + f(x) - f^2(x)) + (f^2(x) - f(x)))$

Exercice 21

Soient E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel et $u \in L(E)$ vérifiant $u^2 - 5u + 6Id_E = 0$.

1) Montrer que u est inversible et préciser son inverse u^{-1}.

2) Montrer les deux inclusions suivantes :

   i) $Im(u - 3Id_E) \subset ker(u - 2Id_E)$

   ii) $Im(u - 2Id_E) \subset ker(u - 3Id_E)$

3) i) Montrer que Id_E est combinaison linéaire de $(u - 3Id_E)$ et $(u - 2Id_E)$.

   ii) En déduire que $E = Im(u - 3Id_E) \oplus Im(u - 2Id_E)$

4) Montrer que $E = ker(u - 3Id_E) \oplus ker(u - 2Id_E)$

5) Notons $p = (3Id_E - u)$, $q = (u - 2Id_E)$.

   i) Montrer que u est combinaison linéaire de p et q.

   ii) Montrer que p et q sont deux projecteurs qui commutent.

iii) Simplifier p^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

iv) En déduire u^n. Donner-la comme combinaison linéaire de u et Id_E. ($n \in \mathbb{N}$ fixé)

6) *Application :*
Considérons $f \in L(\mathbb{R}^2)$ défini par :$f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$.

i) Calculer $(f^2 - 5f + 6Id_{\mathbb{R}^2})$.

ii) En déduire $f^n(x, y)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

iii) Considérons les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$$(u_0 = 1,\ v_0 = -1)\ et\ \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} &= u_n + v_n \end{cases}$$

Déterminer le terme général de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 22

Dans chacun des cas suivants, montrer que F et G sont deux sev de E, puis que $E = F \oplus G$.

1) $E = \mathbb{R}^n$, $F = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + ... + x_n = 0\}$ et
$G = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = ... = x_n\}$

2) $E = D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$.
G l'ensemble des fonctions affines.
Rappel : Une fonction affine est de forme $f : x \mapsto ax + b$,où $a, b \in \mathbb{R}$ fixés.

3) $E = \mathbb{R}[X]$. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P(2) = 0\}$. $G = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 23

$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\}$.
$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\}$.
$G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n = 0\}$.
Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de E.

Exercice 24

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x + z, y + z, 0)$.
Montrer que g est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et trouver sa base et sa direction

Exercice 25

Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = vect(e_1, e_2)$ et $G = vect(e_3)$; où $\begin{cases} e_1 &= (1,0,0) \\ e_2 &= (1,1,0) \\ e_3 &= (1,2,3) \end{cases}$

1) Montrer que $E = F \oplus G$

2) Déterminer $p(x, y, z)$; où p est le projecteur sur F parallèlement à G.

3) Déterminer aussi $s(x, y, z)$; où s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 26

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Considérons l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z}$

1) Montrer que $f \in L(\mathbb{C})$.
2) Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{C}$.
3) Déterminer ses éléments caractéristiques. Vérifier sa bases et sa direction sont des droites vectorielles.

Exercice 27

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Considérons l'application $S : E \to E$, qui associe à chaque fonction $f \in E$ la fonction $S(f)$ définie par : $(\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = f(1-x))$
Montrer que S est une symétrie vectorielle de E.

Exercice 28 (*classique*)

Soit E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel.
Soient p et q deux projecteurs de E vérifiant $(pq = qp = 0)$.
Soient α et β deux scalaires fixés. Posons $f = \alpha p + \beta q$.

1) Expliciter p^n et q^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire f^n, où $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression en fonction de p et q.

Exercice 29

P désigne l'ensemble des projecteurs de E, où on définit la relation $\preceq$ par :

$$p \preceq q \iff (pq = qp = p)$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur P